भौतिकी

भाग 2

कक्षा 11 के लिए पाठ्यपुस्तक

11089

विद्यया ऽमृतमश्नुते
एन सी ई आर टी
NCERT

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

11089–भौतिकी (भाग 2)
कक्षा 11 के लिए पाठ्यपुस्तक

ISBN 81-7450-515-6 (भाग 1)
ISBN 81-7450-591-1 (भाग 2)

प्रथम संस्करण
जुलाई 2006 श्रावण 1928

पुनर्मुद्रण
जनवरी 2007, मई 2008, जून 2009, जनवरी 2010, जून 2011, फरवरी 2012, जनवरी 2013, मार्च 2014, फरवरी 2015, दिसंबर 2015, मार्च 2017, दिसंबर 2017, फरवरी 2019 और अक्तूबर 2019

संशोधित संस्करण
नवंबर 2022 अग्रहायण 1944

पुनर्मुद्रण
मार्च 2024 चैत्र 1946

PD 10T SU

₹ 145.00

एन.सी.ई.आर.टी. वाटरमार्क 70 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित।

प्रकाशन प्रभाग में सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नयी दिल्ली 110016 द्वारा प्रकाशित तथा बेरी आर्ट प्रेस, ए-9, मायापुरी इंडस्ट्रियल एरिया, फेज़-I, नयी दिल्ली 110 064 द्वारा मुद्रित।

एन.सी.ई.आर.टी. के प्रकाशन प्रभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैंपस
श्री अरविंद मार्ग
नयी दिल्ली 110 016 फोन : 011-26562708

108, 100 फीट रोड
हेली एक्सटेंशन, होस्डेकेरे
बनाशंकरी III इस्टेज
बेंगलुरु 560 085 फोन : 080-26725740

नवजीवन ट्रस्ट भवन
डाकघर नवजीवन
अहमदाबाद 380 014 फोन : 079-27541446

सी.डब्ल्यू.सी. कैंपस
निकट: धनकल बस स्टॉप पनिहटी
कोलकाता 700 114 फोन : 033-25530454

सी.डब्ल्यू.सी. कॉम्प्लैक्स
मालीगांव
गुवाहाटी 781 021 फोन : 0361-2674869

प्रकाशन सहयोग

अध्यक्ष, प्रकाशन प्रभाग	: अनूप कुमार राजपूत
मुख्य संपादक	: श्वेता उप्पल
मुख्य उत्पादन अधिकारी	: अरुण चितकारा
मुख्य व्यापार प्रबंधक (प्रभारी)	: अमिताभ कुमार
संपादक	: नरेश यादव
सहायक उत्पादन अधिकारी	: ओम प्रकाश

आवरण एवं चित्रांकन
श्वेता राव

आमुख

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (2005) सुझाती है कि बच्चों के स्कूली जीवन को बाहर के जीवन से जोड़ा जाना चाहिए। यह सिद्धांत किताबी ज्ञान की उस विरासत के विपरीत है जिसके प्रभाववश हमारी व्यवस्था आज तक स्कूल और घर के बीच अंतराल बनाए हुए है। नयी राष्ट्रीय पाठ्यचर्या पर आधारित पाठ्यक्रम और पाठ्यपुस्तकें इस बुनियादी विचार पर अमल करने का प्रयास हैं। इस प्रयास में हर विषय को एक मज़बूत दीवार से घेर देने और जानकारी को रटा देने की प्रवृत्ति का विरोध शामिल है। आशा है कि ये कदम हमें राष्ट्रीय शिक्षा नीति (1986) में वर्णित बाल-केंद्रित व्यवस्था की दिशा में काफ़ी दूर तक ले जाएँगे।

इस प्रयत्न की सफलता अब इस बात पर निर्भर है कि स्कूलों के प्राचार्य और अध्यापक बच्चों को कल्पनाशील गतिविधियों और सवालों की मदद से सीखने और सीखने के दौरान अपने अनुभवों पर विचार करने का कितना अवसर देते हैं। हमें यह मानना होगा कि यदि जगह, समय और आज़ादी दी जाए तो बच्चे बड़ों द्वारा सौंपी गई सूचना-सामग्री से जुड़कर और जूझकर नए ज्ञान का सृजन करते हैं। शिक्षा के विविध साधनों एवं स्रोतों की अनदेखी किए जाने का प्रमुख कारण पाठ्यपुस्तक को परीक्षा का एकमात्र आधार बनाने की प्रवृत्ति है। सर्जना और पहल को विकसित करने के लिए ज़रूरी है कि हम बच्चों को सीखने की प्रक्रिया में पूरा भागीदार मानें और बनाएँ, उन्हें ज्ञान की निर्धारित खुराक का ग्राहक मानना छोड़ दें।

ये उद्देश्य स्कूल की दैनिक ज़िंदगी और कार्यशैली में काफ़ी फ़ेरबदल की माँग करते हैं। दैनिक समय-सारणी में लचीलापन उतना ही ज़रूरी है, जितना वार्षिक कैलेंडर के अमल में चुस्ती, जिससे शिक्षण के लिए नियत दिनों की संख्या हकीकत बन सके। शिक्षण और मूल्यांकन की विधियाँ भी इस बात को तय करेंगी कि यह पाठ्यपुस्तक स्कूल में बच्चों के जीवन को मानसिक दबाव तथा बोरियत की जगह खुशी का अनुभव बनाने में कितनी प्रभावी सिद्ध होती है। बोझ की समस्या से निपटने के लिए पाठ्यक्रम निर्माताओं ने विभिन्न चरणों में ज्ञान का पुनर्निर्धारण करते समय बच्चों के मनोविज्ञान एवं अध्यापन के लिए उपलब्ध समय का ध्यान रखने की पहले से अधिक सचेत कोशिश की है। इस कोशिश को और गहराने के यत्न में यह पाठ्यपुस्तक सोच-विचार और विस्मय, छोटे समूहों में बातचीत एवं बहस और हाथ से की जाने वाली गतिविधियों को प्राथमिकता देती है।

एन.सी.ई.आर.टी. इस पुस्तक की रचना के लिए बनाई गई पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति के परिश्रम के लिए कृतज्ञता व्यक्त करती है। परिषद् विज्ञान एवं गणित पाठ्यपुस्तक सलाहकार समिति के अध्यक्ष, प्रोफ़ेसर जे.वी. नार्लीकर और इस पाठ्यपुस्तक के मुख्य सलाहकार, प्रोफ़ेसर ए.डब्ल्यू. जोशी, जिन्होंने इस समिति के कार्य को निर्देशित किया, की विशेष आभारी है। इस पाठ्यपुस्तक के विकास में कई शिक्षकों ने योगदान किया; इस योगदान को संभव बनाने के लिए हम उनके प्राचार्यों के आभारी हैं। हम उन सभी संस्थाओं और संगठनों के प्रति कृतज्ञ हैं जिन्होंने अपने संसाधनों, सामग्री तथा सहयोगियों की मदद लेने में हमें उदारतापूर्वक सहयोग दिया। प्रोफ़ेसर मृणाल मीरी और प्रोफ़ेसर जी. पी. देशपांडे की अध्यक्षता में मानव संसाधन विकास मंत्रालय के अधीन उच्च माध्यमिक शिक्षा विभाग द्वारा गठित निगरानी समिति (मॉनीटरिंग कमेटी) के सदस्यों के अमूल्य समय और सहयोग के लिए हम कृतज्ञ हैं। व्यवस्थागत सुधारों और अपने प्रकाशनों में निरंतर निखार लाने के प्रति समर्पित एन.सी.ई.आर.टी. टिप्पणियों एवं सुझावों का स्वागत करेगी जिनसे भावी संशोधनों में मदद ली जा सके।

निदेशक

नयी दिल्ली — राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और

20 दिसंबर 2005 — प्रशिक्षण परिषद्

पाठ्यपुस्तकों में पाठ्य सामग्री का पुनर्संयोजन

कोविड-19 महामारी को देखते हुए, विद्यार्थियों के ऊपर से पाठ्य सामग्री का बोझ कम करना अनिवार्य है। *राष्ट्रीय शिक्षा नीति, 2020* में भी विद्यार्थियों के लिए पाठ्य सामग्री का बोझ कम करने और रचनात्मक नज़रिए से अनुभवात्मक अधिगम के अवसर प्रदान करने पर ज़ोर दिया गया है। इस पृष्ठभूमि में, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने सभी कक्षाओं में पाठ्यपुस्तकों को पुनर्संयोजित करने की शुरुआत की है। इस प्रक्रिया में रा.शै.अ.प्र.प. द्वारा पहले से ही विकसित कक्षावार सीखने के प्रतिफलों को ध्यान में रखा गया है।

पाठ्य सामग्रियों के पुनर्संयोजन में निम्नलिखित बिंदुओं को ध्यान में रखा गया है —

- एक ही कक्षा में अलग-अलग विषयों के अंतर्गत समान पाठ्य सामग्री का होना;
- एक कक्षा के किसी विषय में उससे निचली कक्षा या ऊपर की कक्षा में समान पाठ्य सामग्री का होना;
- कठिनाई स्तर;
- विद्यार्थियों के लिए सहज रूप से सुलभ पाठ्य सामग्री का होना, जिसे शिक्षकों के अधिक हस्तक्षेप के बिना, वे खुद से या सहपाठियों के साथ पारस्परिक रूप से सीख सकते हों;
- वर्तमान संदर्भ में अप्रासंगिक सामग्री का होना।

वर्तमान संस्करण, ऊपर दिए गए परिवर्तनों को शामिल करते हुए तैयार किया गया पुनर्संयोजित संस्करण है।

प्राक्कथन

एक दशक से भी अधिक समय पूर्व, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने प्रो. टी.वी. रामकृष्णन, एफ.आर.एस., की अध्यक्षता में लेखकों के एक दल की सहायता से कक्षा 11 तथा 12 के लिए लिखी गई पाठ्यपुस्तकें प्रकाशित की थीं। इन पुस्तकों को विद्यार्थियों तथा शिक्षकों ने समान रूप से भलीभांति अपनाया। वास्तव में ये पुस्तकें मील का पत्थर तथा विचारधारा निर्धारित करने वाली सिद्ध हुईं। तथापि, पाठ्यपुस्तकों और विशेषकर विज्ञान की पुस्तकों का विकास परिवर्तनशील बोध, आवश्यकता, पुनर्निवेशन तथा विद्यार्थियों, शिक्षाविदों तथा समाज के अनुभवों की दृष्टि से एक गत्यात्मक प्रक्रिया है। विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा–2000 पर आधारित संशोधित पाठ्यक्रमों के अनुरूप भौतिकी की पाठ्यपुस्तकों का एक दूसरा संस्करण प्रोफेसर सुरेश चन्द्र के निर्देशन में प्रकाशित किया गया जो अब तक लागू था। हाल में राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005 (एन.सी.एफ. 2005) प्रकाशित की तथा विद्यालयी स्तर पर पाठ्यचर्या नवीकरण प्रक्रिया के दौरान पाठ्यक्रम में तदनुसार संशोधन किया गया। *उच्चतर माध्यमिक स्तर के लिए पाठ्यक्रम* (एन.सी.ई.आर.टी., 2005) विकसित किया गया है। कक्षा 11 की पाठ्यपुस्तक में 15 अध्याय दो भागों में हैं। भाग 1 में प्रथम आठ अध्याय हैं जबकि भाग 2 में अगले सात अध्याय हैं। प्रस्तुत पुस्तक वर्तमान पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति के नवीन प्रयास का परिणाम है और साथ ही यह आशा है कि विद्यार्थी भौतिकी के सुंदरता एवं तर्क का महत्त्व समझेंगे। उच्चतर माध्यमिक स्तर के आगे विद्यार्थी भौतिकी का अध्ययन जारी रख सकते हैं या नहीं भी परन्तु हम मानते हैं कि वे चाहे किसी भी दूसरे विषय का अध्ययन करें, उसमें वे भौतिकी की सोच–विचार प्रक्रिया को उपयोगी पाएँगे। यह विषय, कुछ भी हों, जैसे – अर्थव्यवस्था, प्रशासन, सामाजिक विज्ञान, पर्यावरण, अभियांत्रिकी, प्रौद्योगिकी, जीवविज्ञान या चिकित्साशास्त्र। उन विद्यार्थियों के लिए, जो भौतिकी का अध्ययन इस स्तर के आगे जारी रखेंगे, इस पुस्तक में विकसित विषय निश्चय ही एक सुदृढ़ आधार प्रदान करेगा।

विज्ञान और प्रौद्योगिकी की लगभग सभी शाखाओं के ज्ञान का आधारभूत भौतिकी है। यह उल्लेख करना रोचक है कि भौतिकी की धारणाओं एवं विचारों का उपयोग ज्ञान की दूसरी भाषाओं; जैसे – अर्थशास्त्र, वाणिज्य और व्यवहार विज्ञान में भी बढ़ता जा रहा है। हम इस तथ्य से अभिज्ञ हैं कि भौतिकी के कुछ सरल आधारिक सिद्धांत प्रायः प्रत्यात्मक रूप में जटिल होते हैं। इस पुस्तक में हमने 'प्रत्यात्मक सामंजस्य' लाने का प्रयास किया है। शैक्षणिक तथा विषय की परिशुद्धता को बनाए रखकर सरल एवं सुबोध भाषा का प्रयोग करना हमारे प्रयास का केंद्र बिंदु है। भौतिकी विषय की प्रकृति ही ऐसी है जिसके लिए कुछ न्यूनतम गणित का उपयोग करना आवश्यक हो जाता है। जहाँ तक संभव हो सका है हमने गणितीय सूत्रों को तार्किक ढंग से विकसित करने का प्रयास किया है।

भौतिकी के विद्यार्थियों एवं अध्यापकों को पूर्ण रूप से समझना चाहिए कि भौतिकी विषय को याद करने की बजाय बोधगम्य बनाने की आवश्यकता होती है। जब हम माध्यमिक से उच्चतर माध्यमिक या आगे की स्तर को जाते हैं तो भौतिकी में मुख्य रूप से चार अवयव होते हैं : (i) गणित का पर्याप्त सुदृढ़ आधार, (ii) तकनीकी शब्द एवं पद जिनके अंग्रेजी भाषा में सामान्य अर्थ एकदम भिन्न हो सकते हैं, (iii) नयी जटिल अवधारणाएँ, तथा (iv) प्रायोगिक आधार। भौतिकी में गणित की आवश्यकता है क्योंकि हम अपने चारों ओर के परिवेश का यथार्थ चित्रण विकसित तथा अपने प्रेक्षणों को मेय राशियों के पदों में व्यक्त करना चाहते हैं। भौतिकी कणों के नए गुणों की खोज करती है तथा प्रत्येक कण के लिए एक नाम देना चाहती है। शब्द आमतौर से अंग्रेजी, लैटिन, या ग्रीक भाषा से लेते हैं परन्तु भौतिकी इन शब्दों को एकदम नया अर्थ देती है। इसको समझने के लिए आप ऊर्जा, बल, शक्ति, आवेश, स्पिन या इस तरह के अन्य शब्दों के मान किसी

मानक अंग्रेजी शब्दावली में देख सकते हैं तथा इनके अर्थों को भौतिकी में प्रयुक्त इन शब्दों के अर्थों से तुलना कर सकते हैं। भौतिकी कणों के व्यवहार को समझाने के लिए जटिल एवं अनूठी अवधारणाओं को विकसित करती है। अन्ततः यह याद रखना होगा कि भौतिकी प्रेक्षणों और प्रयोगों पर आधारित है – इनके अभाव में किसी सिद्धांत को भौतिकी के क्षेत्र में मान्यता नहीं मिलती है।

इस पुस्तक में कुछ विशिष्टताएँ हैं । हमें पूर्ण आशा एवं विश्वास है कि ये विद्यार्थियों के लिए पुस्तक की उपयोगिता में वृद्धि करेंगी । अध्याय की विषय-वस्तु पर तेजी से सरसरी दृष्टि डालने के लिए प्रत्येक अध्याय के अंत में **सारांश** दिया गया है । इसके पश्चात् **विचारणीय विषय** दिए गए हैं जो विद्यार्थियों के मस्तिष्क में उत्पन्न होने वाली संभावित भ्रांतियों, अध्याय में दिए कुछ प्रकथनों/सिद्धांतों में छिपी उलझनों तथा अध्याय से उपलब्ध ज्ञान के उपयोग के लिए आवश्यक 'चेतावनियों' की ओर इंगित करते हैं। ये कुछ विचार उत्तेजक प्रश्न भी उठाते हैं जिनसे विद्यार्थी भौतिकी के परे जीवन पर विचार कर सके। इन 'बिंदुओं' पर सोचना तथा अपने मस्तिष्क का अनुप्रयोग करना विद्यार्थियों को रोचक लगेगा । इसके अतिरिक्त संकल्पनाओं के स्पष्टीकरण तथा/अथवा दैनिक जीवन की परिस्थितियों में इन संकल्पनाओं के अनुप्रयोगों की व्याख्या के लिए बड़ी संख्या में पाठ्य सामग्री में 'हल सहित अभ्यासों' का समावेश किया गया है । यदा-कदा भौतिकी विषय के क्रमिक विकास के प्रति जिज्ञासा को शांत करने के लिए ऐतिहासिक परिप्रेक्ष्यों को भी सम्मिलित किया गया है । बहुत से अध्यायों में या तो इसी उद्देश्य के लिए अथवा उन विषयवस्तुओं जिनमें विद्यार्थियों को अतिरिक्त ध्यान देने की आवश्यकता होती है, उनकी कुछ विशेष विशिष्टताओं की ओर आकर्षित करने के उद्देश्य से विषयवस्तु को 'बॉक्स' में दिया गया है । पुस्तक के अंत में पुस्तक में प्रयुक्त मुख्य शब्दों की सूची दी गई है।

भौतिकी की विशेष प्रकृति, धारणाओं की समझ के अलावा कुछ परिपाटियों का ज्ञान, आधारभूत गणितीय साधन, महत्त्वपूर्ण भौतिक स्थिरांकों के आंकिक मान, सूक्ष्म स्तर से गैलेक्सीन स्तर के परिसर तक उपयोगी मात्रकों की प्रणाली की अपेक्षा करती है। विद्यार्थियों की सहायता के लिए हमने पुस्तक के अंत में परिशिष्ट A1 से A9 के रूप में आवश्यक साधन एवं डाटाबेस दिए हैं। अतिरिक्त जानकारी या किसी अध्याय विशेष में वर्णित विषय के उपयोग के लिए कुछ अध्यायों के अंत में भी कुछ परिशिष्ट दिए गए हैं।

सुस्पष्ट चित्र प्रदान करने की ओर विशेष ध्यान दिया गया है । चित्रों की स्पष्टता में वृद्धि के लिए उन्हें 'दो रंगों' में रेखांकित किया गया है । प्रत्येक अध्याय के अंत में पर्याप्त संख्या में अभ्यास दिए गए हैं । इनमें से कुछ जीवन की वास्तविक परिस्थितियों से संबंधित हैं । विद्यार्थियों से अनुरोध है कि वे इन्हें हल करें और ऐसा करते समय वे इन अभ्यासों को अत्यधिक शिक्षाप्रद पाएंगे। कुछ अतिरिक्त अभ्यास भी दिए गए हैं जो अधिक कठिन हैं। कुछ अभ्यासों को हल करने के लिए संकेत एवं उत्तर दिए गए हैं। संपूर्ण पुस्तक में SI मात्रकों का उपयोग किया गया है । निर्धारित पाठ्यक्रम/पाठ्यचर्या के भाग के रूप में और साथ ही भौतिकी के लक्ष्य में सहायक के रूप में अध्याय 2 में "मात्रक और मापन" का विस्तृत विवरण दिया गया है । इस अध्याय में दिया गया एक 'बॉक्स' एक लंबी वक्रीय लाइन जैसी सरल वस्तु के मापन से कठिनाइयों को उजागर करता है। SI मूल मात्रकों एवं अन्य संबंधित मात्रकों की सारणी इस अध्याय में वर्तमान मान्य परिभाषाओं को मन में बैठाने तथा आज मापन में उपलब्ध शुद्धता की उच्चकोटि को स्पष्ट करने के लिए की गई है। यहाँ दी गई संख्याओं को न तो कंठस्थ करने की आवश्यकता है और न इन्हें परीक्षा में पूछना चाहिए।

विद्यार्थियों, अध्यापकों तथा आम जनता में यह धारणा है कि माध्यमिक और उच्चतर माध्यमिक स्तर में तीक्ष्ण चढ़ाव है। परन्तु तनिक सोच दर्शाती है कि शिक्षा की वर्तमान व्यवस्था में ऐसा होगा ही। माध्यमिक स्तर तक की शिक्षा सामान्य शिक्षा है जहाँ विद्यार्थी को कई विषयों, विज्ञान, सामाजिक विज्ञान, गणित, भाषा का अध्ययन प्राथमिक स्तर का करना होता है। उच्चतर माध्यमिक या आगे की शिक्षा में, उद्यम के किसी चुने क्षेत्र में व्यावसायिक दक्षता ग्रहण करना होता है। इसकी तुलना आप निम्न स्थिति से कर सकते हैं। बच्चे

अपने घरों के अंदर या बाहर या गलियों में क्रिकेट या बैडमिंटन खेलते हैं। परन्तु उनमें से कुछ स्कूल टीम, फिर जिले की टीम, फिर राज्य टीम और राष्ट्रीय टीम तक पहुँचना चाहते हैं। प्रत्येक स्तर पर तीक्ष्ण चढ़ाव होगा ही। अधिक परिश्रम जरूरी होता है यदि विद्यार्थी विज्ञान, साहित्य, भाषा, संगीत, कला, वाणिज्य, अर्थप्रबन्ध, वास्तुकला के क्षेत्र में शिक्षा ग्रहण करना चाहते हैं या वे खिलाड़ी या फैशन डिज़ाइनर बनना चाहते हैं।

इस पुस्तक को पूर्ण कर पाना बहुत से व्यक्तियों की सहज स्वाभाविक एवं सतत् सहायता के कारण ही संभव हो सका है। पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति डा. आर.एच. रेबेगकर का अध्याय 4 में उनके बॉक्स विषय तथा डॉ. एफ.आई. सुर्वे का अध्याय 15 में उनके बॉक्स विषय के उपयोग की अनुमति के लिए आभारी है। विज्ञान शिक्षा में सुधार के लिए राष्ट्रीय प्रयासों के एक भाग के रूप में इस पाठ्यपुस्तक के निर्माण का कार्य सौंपने के लिए हम राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् के निदेशक के प्रति अपना आभार प्रकट करते हैं। परिषद् के विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के अध्यक्ष तथा संकाय के अन्य सदस्य इस उद्यम में सदैव ही हर संभव ढंग से हमारी सहायता के लिए तत्पर रहे, हम उनके भी अत्यंत अभारी हैं।

पुरानी पाठ्यपुस्तक को शिक्षकों, विद्यार्थियों तथा विशेषज्ञों का श्रेष्ठ विद्वतापूर्ण निवेश प्राप्त हुआ जिन्होंने पिछले कुछ वर्षों में परिमार्जन के लिए सुझाव दिए। हम उन सभी के कृतज्ञ हैं जिन्होंने एन.सी.ई.आर.टी. को अपने सुझाव भेजे। हम प्रथम पाण्डुलिपि पर चर्चा तथा परिमार्जन के लिए आयोजित समीक्षा कार्यगोष्ठी तथा सम्पादन कार्यगोष्ठी के सदस्यों के भी आभारी हैं। हम अध्यक्ष तथा उनके लेखन मंडल को उनके द्वारा 1988 में लिखी गई पाठ्यसामग्री के लिए धन्यवाद देते हैं जिसने 2002 संस्करण तथा जिसने हमें इस पाठ्यपुस्तक को विकसित करने का आधार तथा संदर्भ प्रदान किया। यदा-कदा पुरानी पुस्तकों के कुछ बड़े भागों को, विशेषकर जिन्हें विद्यार्थियों/शिक्षकों ने सराहा है, विद्यार्थियों की भावी पीढ़ी के हित को ध्यान में रखकर, प्रस्तुत पुस्तक में अपनाया/रूपांतरित किया है।

हम अपने सम्मानित प्रयोक्ताओं, विशेषकर विद्यार्थियों तथा शिक्षकों से प्राप्त समीक्षा एवं सुझावों का आदर करते हैं। हम अपने युवा पाठकों की भौतिकी के रोमांचकारी कार्यक्षेत्र की ओर अग्रसर होने की कामना करते हैं।

ए. डब्ल्यू. जोशी
मुख्य सलाहकार
पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति

भारत का संविधान

उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक [1]**[संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न समाजवादी पंथनिरपेक्ष लोकतंत्रात्मक गणराज्य]** बनाने के लिए, तथा उसके समस्त नागरिकों को :

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक **न्याय,**

विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म

और उपासना की **स्वतंत्रता,**

प्रतिष्ठा और अवसर की **समता**

प्राप्त कराने के लिए,

तथा उन **सब में**

व्यक्ति की गरिमा और [2]**[राष्ट्र की एकता**

और अखंडता] सुनिश्चित करने वाली **बंधुता**

बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर **अपनी इस संविधान सभा में** आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. को **एतद्द्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं।**

---

1. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) ''प्रभुत्व-संपन्न लोकतंत्रात्मक गणराज्य'' के स्थान पर प्रतिस्थापित।
2. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) ''राष्ट्र की एकता'' के स्थान पर प्रतिस्थापित।

पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति

अध्यक्ष, विज्ञान और गणित पाठ्यपुस्तकों की सलाहकार समिति

जे.वी. नार्लीकर, *इमेरिटस प्रोफ़ेसर*, अंतर-विश्वविद्यालय केंद्र : खगोलविज्ञान और खगोलभौतिकी, पुणे

मुख्य सलाहकार

ए.डब्ल्यू. जोशी, *प्रोफ़ेसर*, हानरेरी विजिटिंग साइंटिस्ट, एनसीआरए, पुणे
(भूतपूर्व प्रोफ़ेसर, भौतिकी विभाग, पुणे विश्वविद्यालय)

सदस्य

अनुराधा माथुर, *पी.जी.टी.*, मॉडर्न स्कूल, वसंत विहार, नयी दिल्ली
आर.जोशी. *प्रवक्ता* (एस.जी.), डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
एच.सी. प्रधान, *प्रोफ़ेसर*, होमी भाभा विज्ञान शिक्षा केन्द्र, टाटा इंस्टीट्यूट ऑफ फंडामेंटल रिसर्च, मुंबई
एन. पंचपकेशन, *अवकाश प्राप्त प्रोफ़ेसर*, भौतिकी एवं खगोलभौतिकी विभाग, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली
एस. राय चौधरी, *प्रोफ़ेसर*, भौतिकी एवं खगोलभौतिकी विभाग, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली
एस.के. दास, *रीडर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
एस.एन. प्रभाकर, *पी.जी.टी.*, डी.एम.स्कूल, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, एन.सी.ई.आर.टी., मैसूर
गगन गुप्त, *रीडर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
चित्रा गोयल, *पी.जी.टी.*, राजकीय प्रतिभा विकास विद्यालय, त्यागराज नगर, लोदी रोड, नयी दिल्ली
टी.जे. सिंह, *प्रोफ़ेसर*, भौतिकी विभाग, मणिपुर विश्वविद्यालय, इम्फाल
पी.के. श्रीवास्तव, *अवकाश प्राप्त प्रोफ़ेसर*, निदेशक, सीएसईसी, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली
पी.के. मोहंती, *पी.जी.टी.*, सैनिक स्कूल, भुवनेश्वर
पी.सी. अग्रवाल, *रीडर*, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, एन.सी.ई.आर.टी., भुवनेश्वर
वी.पी. श्रीवास्तव, *रीडर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
शेर सिंह, *पी.जी.टी.*, नवयुग स्कूल, लोदी रोड, नयी दिल्ली

सदस्य-समन्वयक (अंग्रेजी संस्करण)

वी.के. शर्मा, *प्रोफ़ेसर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली

हिंदी अनुवादक

आर.एस. दास, *अवकाश प्राप्त उपप्रधानाचार्य*, बलवंत राय मेहता विद्याभवन सीनियर सेकंडरी स्कूल, नयी दिल्ली
ओ.पी. खंडेलवाल, *अवकाश प्राप्त रीडर*, द्रोणाचार्य राजकीय महाविद्यालय, गुड़गाँव, हरियाणा
जे.पी. अग्रवाल, *अवकाश प्राप्त प्राचार्य*, शिक्षा निदेशालय, राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र, दिल्ली
विनोद प्रकाश, *अवकाश प्राप्त प्रोफ़ेसर*, भौतिकी विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद, उ.प्र.

सदस्य-समन्वयक

वी.पी. श्रीवास्तव, *रीडर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली

आभार

पुस्तक के अंतिम स्वरूप के लिए आयोजित कार्यशाला में भाग लेने वाले निम्नलिखित प्रतिभागियों की बहुमूल्य टिप्पणियों के बारे में परिषद् आभार व्यक्त करती है: वी.बी. त्रिपाठी, *अवकाश प्राप्त प्रोफ़ेसर*, भौतिकी विभाग, आई.आई.टी., नयी दिल्ली; एम.एन. बापट, *रीडर*, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, एन.सी.ई.आर.टी., मैसूर; डी. प्रसाद, *वरिष्ठ वैज्ञानिक अधिकारी* (अवकाश प्राप्त), विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी विभाग, नयी दिल्ली; जे.सी. शर्मा, *शिक्षा अधिकारी*, शिक्षा निदेशालय, राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र, दिल्ली।

शैक्षिक व प्रशासनिक सहयोग के लिए परिषद् एम. चन्द्रा, *प्रोफ़ेसर* तथा *विभागाध्यक्ष*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली की आभारी है।

परिषद् सन 2017 में पाठ्य के परिष्करण में अमूल्य योगदान के लिए एके श्रीवास्तव, डी.ईएस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली; अरनब सेन, एनईआरआइई, शिलांग; एलएस चौहान, आरआइई, भोपाल; ओएन अवस्थी (रिटायर्ड), आरआइई, भोपाल; रचना गर्ग, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली; रामन नंबूदरी, आरआइई, मैसुरू; आर आर कोइरेंग, डीसीएस, एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली; शशि प्रभा, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली और एसवी शर्मा, आरआइई, अजमेर का भी आभार व्यक्त करती है।

परिषद् गीता, अरविंद शर्मा, इन्द्र कुमार, *डी.टी.पी. ऑपरेटर;* रेशमा नेगी, सतीश झा, विभूति नाथ झा, यतेन्द्र यादव, *कॉपी एडीटर;* अनुराधा, रणधीर ठाकुर, सीमा यादव, *प्रूफ रीडर;* दीपक कपूर, *कंप्यूटर स्टेशन प्रभारी,* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी. और प्रकाशन प्रभाग के सहयोग हेतु हार्दिक आभार ज्ञापित करती है।

अध्यापकों के लिए संदेश

पाठ्यचर्या को शिक्षार्थी-केंद्रित बनाने के लिए अति आवश्यक है कि विद्यार्थी अधिगम प्रक्रिया में सक्रिय रूप से भाग लें। प्रति सप्ताह या प्रति छः कक्षाओं पर एक बार इस तरह के सेमिनार और विचारों का आदान-प्रदान आयोजित होना चाहिए। भागीदारों के बीच परिचर्चा के लिए, इस पुस्तक में कुछ विशेष विषयों के संदर्भ में, कुछ सुझाव नीचे दिए गये हैं।

विद्यार्थियों को पाँच या छः के समूह में व्यवस्थित कीजिए। यदि आवश्यक हो, तो शिक्षण वर्ष में इन समूहों के सदस्यों में क्रमावर्तन करें।

परिचर्चा के विषय को बोर्ड पर या कागज पर लिखें। विद्यार्थियों को निर्देश दीजिए कि वे प्रश्नों के उत्तर या अपनी प्रतिक्रिया, जो भी अभीष्ट है, दिए हुए कागज पर लिखें। तत्पश्चात अपने समूह में चर्चा करें तथा इन पृष्ठों पर संशोधन या टिप्पणी जोड़ें। फिर इन सबकी उसी कक्षा में या किसी और कक्षा में परिचर्चा करें। विद्यार्थियों के उत्तर पृष्ठों का मूल्यांकन भी किया जा सकता है। प्रस्तुत पुस्तक से हम तीन सम्भावित विषयों को प्रस्तावित करते हैं। वास्तव में, प्रथम दो विषय, बहुत ही सामान्य हैं तथा पिछले चार या अधिक शताब्दियों के दौरान विज्ञान के विकास से सम्बन्धित हैं। प्रत्येक सेमिनार के लिए विद्यार्थी तथा अध्यापक, इस तरह के अन्य विषय को सुझा सकते हैं।

1. विचार जिसने सभ्यता को बदल दिया

मान लीजिए मानव जाति धीरे-धीरे विलुप्त हो रही है और आने वाली पीढ़ी या परकीय आगंतुक के लिए कोई संदेश छोड़ना है। प्रसिद्ध भौतिक विज्ञानी आर.पी. फाइनमैन आने वाली पीढ़ी के लिए निम्न संदेश छोड़ना चाहते थे :

"पदार्थ अणुओं से बना है"

एक महिला छात्रा तथा साहित्य की अध्यापिका निम्न संदेश छोड़ना चाहती थी :

"जल विद्यमान है, अतः मानव जाति का अस्तित्व रहेगा"

किसी अन्य व्यक्ति ने सोचा : "गति के लिए पहिए का विचार"

आने वाली पीढ़ी के लिए आप में से प्रत्येक जो संदेश छोड़ना चाहेंगे उसे लिखें। तब अपने समूह में इस पर चर्चा करें, और इसमें परिवर्तन करें या इसमें और विचार जोड़ें, यदि आप अपना विचार बदलना चाहते हैं। इसे अपने अध्यापक को दें तथा इससे संबंधित परिचर्चा में भाग लें।

2. न्यूनीकरण

गैस का अणुगति सिद्धान्त 'बड़े को छोटे से' या 'मैक्रो को माइक्रो' से संबंधित करता है। एक निकाय के रूप में गैस इसके अवयवों, अणुओं से संबंधित है। किसी निकाय को उसके अवयवों के गुणों से संबंधित करके वर्णित करना *न्यूनीकरण* कहलाता है। यह विधि व्यष्टि के साधारण एवं भविष्यवाची व्यवहार के आधार पर समूह के व्यवहार को स्पष्ट करती है। इस उपगमन में सूक्ष्मदर्शी गुणों एवं स्थूल प्रेक्षणों में एक परस्पर निर्भरता होती है। क्या यह विधि उपयोगी है? इस प्रकार के उपगमन की भौतिकी और रसायन विज्ञान के अतिरिक्त अन्य विषयों में अपनी सीमाएँ होती हैं - सम्भव है इन विषयों में भी सीमाएँ हों। किसी कैनवस पर बने चित्र को इसमें प्रयुक्त रसायनों के गुणों के समूह से संबंधित कर विवेचना *नहीं* की जा सकती है। वास्तविकता अवयवों के योग से कहीं परे है।

प्रश्न : क्या आप अन्य क्षेत्र बता सकते हैं जहाँ इस प्रकार के उपगमन को उपयोग में लाया जाता है?

किसी निकाय का संक्षेप में वर्णन कीजिए जिसका उसके अवयवों के पदों में पूर्ण रूप से विवेचना किया जा सके। एक अन्य निकाय का भी वर्णन कीजिए जिसमें ऐसा सम्भव नहीं है। अपने समूह के अन्य सदस्यों से इस पर विचार-विमर्श करें और अपने विचार लिखें। इसे अपने अध्यापक को दें तथा इस पर आयोजित परिचर्चा में भाग लें।

3. ऊष्मा का आण्विक उपगमन

आपके विचार से निम्न अवस्थाओं में क्या होगा, बताएँ।

कोई आवेष्टन एक सरंध्र दीवार से दो भागों में पृथक है। एक भाग नाइट्रोजन गैस (N_2) तथा दूसरा कार्बन डाइऑक्साइड (CO_2) से भरा है। गैसें एक भाग से दूसरे भाग में विसरित होती हैं।

प्रश्न 1 : दोनों गैसें एकसमान मात्रा में विसरित होंगी? यदि नहीं, तो कौन सी गैस अधिक विसरित होगी? कारण सहित बताइए।

प्रश्न 2 : क्या दाब एवं ताप अपरिवर्तित रहेंगे? यदि नहीं तो दोनों में क्या परिवर्तन होगा? कारण सहित बताइए।

अपने उत्तर लिखिए। समूह के अन्य सदस्यों के साथ विचार-विमर्श करें तथा उत्तर को परिष्कृत करें या टिप्पणी जोड़ें। उत्तर अध्यापक को दें तथा परिचर्चा में भाग लें।

विद्यार्थी तथा अध्यापक पाएँगे कि इस तरह के परिचर्चा तथा विचार-विमर्श, न केवल भौतिकी में, बल्कि विज्ञान तथा सामाजिक विज्ञान की समझ में हमें अत्यधिक सहायक होते हैं। इससे विद्यार्थियों की सोच में परिपक्वता आएगी।

भौतिकी भाग 1 की विषय-सूची

अध्याय 1
मात्रक और मापन 1

अध्याय 2
सरल रेखा में गति 13

अध्याय 3
समतल में गति 28

अध्याय 4
गति के नियम 50

अध्याय 5
कार्य, ऊर्जा और शक्ति 72

अध्याय 6
कणों के निकाय तथा घूर्णी गति 94

अध्याय 7
गुरुत्वाकर्षण 130

परिशिष्ट 148

अभ्यास तथा अतिरिक्त अभ्यासों के उत्तर 164

विषय-सूची

आमुख *iii*
पाठ्यपुस्तकों में पाठ्य सामग्री का पुनर्संयोजन *v*
प्राक्कथन *vii*
अध्यापकों के लिए संदेश *xiii*

अध्याय 8
ठोसों के यांत्रिक गुण

8.1 भूमिका 173
8.2 प्रतिबल तथा विकृति 174
8.3 हुक का नियम 175
8.4 प्रतिबल-विकृति वक्र 175
8.5 प्रत्यास्थता गुणांक 176
8.6 द्रव्यों के प्रत्यास्थ व्यवहार के अनुप्रयोग 181

अध्याय 9
तरलों के यांत्रिकी गुण

9.1 भूमिका 187
9.2 दाब 187
9.3 धारारेखी प्रवाह 194
9.4 बर्नूली का सिद्धांत 195
9.5 श्यानता 198
9.6 पृष्ठ तनाव 200

अध्याय 10
द्रव्य के तापीय गुण

10.1 भूमिका 211
10.2 ताप तथा ऊष्मा 211
10.3 ताप मापन 212
10.4 आदर्श गैस समीकरण तथा परम ताप 212
10.5 तापीय प्रसार 213
10.6 विशिष्ट ऊष्मा धारिता 217
10.7 ऊष्मामिति 218
10.8 अवस्था परिवर्तन 219
10.9 ऊष्मा स्थानांतरण 223
10.10 न्यूटन का शीतलन नियम 229

अध्याय 11
ऊष्मागतिकी

11.1 भूमिका 237
11.2 तापीय साम्य 238
11.3 ऊष्मागतिकी का शून्य कोटि नियम 239
11.4 ऊष्मा, आंतरिक ऊर्जा तथा कार्य 240
11.5 ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम 241
11.6 विशिष्ट ऊष्मा धारिता 242
11.7 ऊष्मागतिकीय अवस्था चर तथा अवस्था का समीकरण 244
11.8 ऊष्मागतिकीय प्रक्रम 244
11.9 ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम 247
11.10 उत्क्रमणीय व अनुत्क्रमणीय प्रक्रम 247
11.11 कार्नो इंजन 248

अध्याय 12
अणुगति सिद्धांत

12.1 भूमिका 255
12.2 द्रव्य की आण्विक प्रकृति 255
12.3 गैसों का व्यवहार 257
12.4 आदर्श गैसों का अणुगति सिद्धांत 260
12.5 ऊर्जा के समविभाजन का नियम 263
12.6 विशिष्ट ऊष्मा धारिता 265
12.7 माध्य मुक्त पथ 266

अध्याय 13
दोलन

13.1 भूमिका 271
13.2 दोलन और आवर्ती गति 272
13.3 सरल आवर्त गति 274
13.4 सरल आवर्त गति तथा एकसमान वर्तुल गति 276
13.5 सरल आवर्त गति में वेग तथा त्वरण 278
13.6 सरल आवर्त गति के लिए बल का नियम 279
13.7 सरल आवर्त गति में ऊर्जा 280
13.8 सरल आवर्त गति निष्पादित करने वाले कुछ निकाय 282

अध्याय 14

तरंगें

14.1	भूमिका	290
14.2	अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्घ्य तरंगें	292
14.3	प्रगामी तरंगों में विस्थापन संबंध	293
14.4	प्रगामी तरंग की चाल	296
14.5	तरंगों के अध्यारोपण का सिद्धांत	299
14.6	तरंगों का परावर्तन	301
14.7	विस्पंदें	306

अभ्यास तथा अतिरिक्त अभ्यासों के उत्तर	313
ग्रंथ सूची	319
पारिभाषिक शब्दावली	321

मुख्य आवरण अभिकल्पना

नोबल फाउंडेशन की वेबसाइट **http://www.nobelprize.org** से रूपांतरित

प्रबल नाभिकीय बल नाभिक में प्रोटानों तथा न्यूट्रानों को बांधता है तथा प्रकृति के चार मूल बलों में सबसे अधिक शक्तिशाली है। प्रबल नाभिकीय बल से जुड़ी एक गुत्थी सुलझा ली गई है। प्रोटान में अन्तर्निहित तीनों क्वार्क यदा कदा मुक्त प्रतीत होते हैं यद्यपि किसी मुक्त क्वार्क का प्रेक्षण अभी तक नहीं हुआ है। क्वार्कों में एक क्वान्टम यांत्रिकीय गुण होता है जिसे 'कलर' कहते हैं तथा ये एक दूसरे से 'ग्लूऑन्स' (प्राकृतिक सरेस) नामक बलों के विनिमय से अन्योन्यक्रिया करते हैं।

पृष्ठ आवरण

भारतीय अंतरिक्ष अनुसंधान संगठन (ISRO) की वेबसाइट **http://www.isro.gov.in** से रूपांतरित

कार्टोसैट-1 (CARTOSAT-1) *अति निपुणता वाला सुदूर संवेदन उपग्रह है। यह भारतीय अंतरिक्ष शोध संस्थान* (ISRO) *द्वारा इंडियन रिमोट सेन्सिंग सेटेलाइट्स श्रेणी में निर्मित ग्यारहवां उपग्रह है। मोचन क्षण पर इसकी संहति* 156 kg *थी, तथा इसे* ISRO *के ध्रुवीय उपग्रह प्रमोचन वाहन* PSLV-C6 *द्वारा* 618 km *ऊँचे ध्रुवी सूर्य तुल्यकालिक कक्ष में प्रमोचित किया गया। इसका उपयोग मुख्य रूप से मानचित्र कला के क्षेत्र में है।*

11089CH09

अध्याय 8

ठोसों के यांत्रिक गुण

8.1 भूमिका
8.2 प्रतिबल तथा विकृति
8.3 हुक का नियम
8.4 प्रतिबल-विकृति वक्र
8.5 प्रत्यास्थता गुणांक
8.6 द्रव्यों के प्रत्यास्थ व्यवहार के अनुप्रयोग

सारांश
विचारणीय बिंदु
अभ्यास

8.1 भूमिका

अध्याय 7 में हमने पिण्डों के घूर्णन के बारे में पढ़ा और यह समझा कि किसी पिण्ड की गति इस बात पर कैसे निर्भर करती है कि पिण्ड के अंदर द्रव्यमान किस प्रकार वितरित है। हमने अपने अध्ययन को केवल दृढ़ पिण्डों की सरल स्थितियों तक ही सीमित रखा था। साधारणतया दृढ़ पिण्ड का अर्थ होता है एक ऐसा कठोर ठोस पदार्थ जिसकी कोई निश्चित आकृति तथा आकार हो। परन्तु वास्तव में पिण्डों को तनित, संपीडित अथवा बंकित किया जा सकता है। यहाँ तक कि किसी काफी दृढ़ इस्पात की छड़ को भी एक पर्याप्त बाह्य बल लगाकर विरूपित किया जा सकता है। इससे यह अर्थ निकलता है कि ठोस पिण्ड पूर्ण रूप से दृढ़ नहीं होते हैं।

किसी ठोस की एक निश्चित आकृति तथा आकार होता है। किसी पिण्ड की आकृति अथवा आकार को बदलने (या विरूपित करने) के लिए एक बल की आवश्यकता होती है। यदि किसी कुण्डलित स्प्रिंग के सिरों को धीरे से खींचकर विस्तारित किया जाए तो स्प्रिंग की लंबाई थोड़ी बढ़ जाती है। अब यदि स्प्रिंग के सिरों को छोड़ दें तो वह अपनी प्रारंभिक आकृति एवं आकार को पुनः प्राप्त कर लेगी। किसी पिण्ड का वह गुण, जिससे वह प्रत्यारोपित बल को हटाने पर अपनी प्रारंभिक आकृति एवं आकार को पुनः प्राप्त कर लेता है, **प्रत्यास्थता** कहलाता है तथा उत्पन्न विरूपण **प्रत्यास्थ विरूपण** कहलाता है। जब एक पंक पिण्ड पर बल लगाते हैं तो पिण्डक में अपना प्रारंभिक आकार प्राप्त करने की प्रवृत्ति नहीं होती है और यह स्थायी रूप से विरूपित हो जाता है। इस प्रकार के पदार्थ को **प्लास्टिक** तथा पदार्थ के इस गुण को **प्लास्टिकता** कहते हैं। पंक और पुटी लगभग आदर्श प्लैस्टिक हैं।

अभियांत्रिकी डिज़ाइन में द्रव्यों के प्रत्यास्थ व्यवहार की अहम भूमिका होती है। उदाहरण के लिए, किसी भवन को डिज़ाइन करते समय इस्पात, कांक्रीट आदि द्रव्यों की प्रत्यास्थ प्रकृति का ज्ञान आवश्यक है। पुल, स्वचालित वाहन, रज्जुमार्ग आदि की डिज़ाइन के लिए भी यही बात सत्य है। यह प्रश्न भी पूछा जा सकता है कि क्या हम ऐसा वायुयान डिज़ाइन कर सकते हैं जो बहुत हलका

फिर भी बहुत मजबूत हो? क्या हम एक ऐसा कृत्रिम अंग डिज़ाइन कर सकते हैं जो अपेक्षाकृत हलका किन्तु अधिक मजबूत हो? रेल पटरी की आकृति **I** के समान क्यों होती है? काँच क्यों भंगुर होता है जबकि पीतल ऐसा नहीं होता? इस प्रकार के प्रश्नों का उत्तर इस अध्ययन से प्रारंभ होगा कि अपेक्षाकृत साधारण प्रकार के लोड या बल भिन्न-भिन्न ठोस पिण्डों को किस प्रकार विरूपित करने का कार्य करते हैं। इस अध्याय में हम ठोसों के प्रत्यास्थ व्यवहार और यांत्रिक गुणों का अध्ययन करेंगे जो ऐसे बहुत से प्रश्नों का उत्तर देगा।

8.2 प्रतिबल तथा विकृति

जब किसी पिण्ड पर एक बल लगाया जाता है तो उसमें थोड़ा या अधिक विरूपण हो जाता है जो पिण्ड के द्रव्य की प्रकृति तथा विरूपक बल के मान पर निर्भर करता है। हो सकता है कि बहुत से द्रव्यों में यह विरूपण बेशक दिखाई नहीं पड़ता, फिर भी यह होता है। जब किसी पिण्ड पर एक विरूपक बल लगाया जाता है तो उसमें एक प्रत्यानयन बल विकसित हो जाता है, जैसा कि पहले कहा जा चुका है। यह प्रत्यानयन बल मान में प्रत्यारोपित बल के बराबर तथा दिशा में उसके विपरीत होता है। एकांक क्षेत्रफल पर लगने वाले प्रत्यानयन बल को **प्रतिबल** कहते हैं। यदि पिण्ड के क्षेत्रफल A वाले किसी अनुप्रस्थ काट की लंबवत् दिशा में लगाए गए बल का मान F हो तो

$$\text{प्रतिबल} = F/A \tag{8.1}$$

प्रतिबल की SI इकाई $N\ m^{-2}$ तथा इसका विमीय सूत्र $[ML^{-1}T^{-2}]$ होता है।

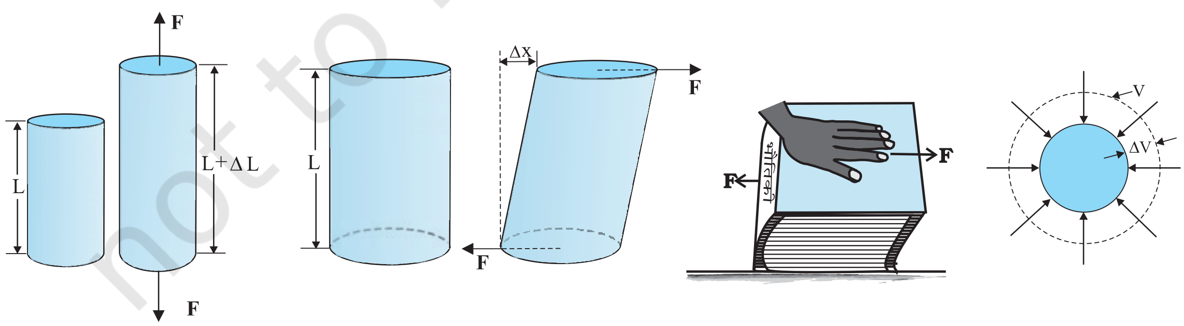
जब किसी ठोस पर कोई बाह्य बल कार्य करता है तो इसकी विमाएँ तीन प्रकार से बदल सकती हैं। ये चित्र 8.1 में दिखाए गए हैं। चित्र 8.1(a) में, एक बेलन को उसके अनुप्रस्थ परिच्छेद की लंबवत् दिशा में दो समान बल लगाकर तानित किया गया है। इस स्थिति में, एकांक क्षेत्रफल पर प्रत्यानयन बल को **तनन प्रतिबल** कहते हैं। यदि प्रत्यारोपित बलों के कार्य से बेलन संपीडित हो जाए तो एकांक क्षेत्रफल पर प्रत्यानयन बल को **संपीडन प्रतिबल** कहते हैं। तनन या संपीडन प्रतिबल को अनुदैर्घ्य प्रतिबल भी कहा जा सकता है।

दोनों ही स्थितियों में बेलन की लंबाई में अंतर हो जाता है। पिण्ड (यहाँ बेलन) की लंबाई में परिवर्तन ΔL तथा उसकी प्रारंभिक लंबाई L के अनुपात को **अनुदैर्घ्य विकृति** कहते हैं।

$$\text{अनुदैर्घ्य विकृति} = \frac{\Delta L}{L} \tag{8.2}$$

यदि दो बराबर और विरोधी विरूपक बल बेलन के अनुप्रस्थ परिच्छेद के समांतर लगाए जाएँ, जैसा चित्र 8.1(b) में दिखाया गया है, तो बेलन के सम्मुख फलकों के बीच सापेक्ष विस्थापन हो जाता है। लगाए गए स्पर्शी बलों के कारण एकांक क्षेत्रफल पर उत्पन्न प्रत्यानयन बल को **स्पर्शी** या **अपरूपण प्रतिबल** कहते हैं। लगाए गए स्पर्शी बल के परिणामस्वरूप बेलन के सम्मुख फलकों के बीच एक सापेक्ष विस्थापन Δx होता है, जैसा चित्र 8.1(b) में दिखाया गया है। इस प्रकार उत्पन्न विकृति को **अपरूपण विकृति** कहते हैं और इसे फलकों के सापेक्ष विस्थापन Δx तथा बेलन की लंबाई L के अनुपात से परिभाषित करते हैं :

$$\text{अपरूपण विकृति} = \frac{\Delta x}{L}$$
$$= \tan\theta \tag{8.3}$$



चित्र 8.1 *(a) तनन प्रतिबल के प्रभाव में एक बेलन ΔL मान से विस्तरित हो जाता है, (b) अपरूपण (स्पर्शी) प्रतिबल के प्रभाव में एक बेलन कोण θ से विरूपित हो जाता है, (c) अपरूपण प्रतिबल के प्रभाव में एक पुस्तक, (d) समान जलीय प्रतिबल के प्रभाव में एक ठोस गोला ΔV मान से आयतन में संकुचित हो जाता है।*

जहाँ θ ऊर्ध्वाधर (बेलन की प्रारंभिक स्थिति) से बेलन का कोणीय विस्थापन है। चूंकि θ बहुत कम होता है, $\tan\theta$ लगभग कोण θ के बराबर ही होता है, (उदाहरण के लिए यदि $\theta = 10°$ तो θ और $\tan\theta$ के मान में केवल 1% का अंतर होता है)। यदि किसी पुस्तक को हाथ से दबाकर क्षैतिज दिशा में ढकेलें, जैसा चित्र 8.2(c) में दिखाया गया है, तब भी ऐसी विकृति को देखा जा सकता है। इस प्रकार,

$$\text{अपरूपण विकृति} = \tan\theta \approx \theta \qquad (8.4)$$

चित्र 8.1(d) में, अधिक दाब के किसी द्रव के अंदर रखा एक ठोस गोला सभी ओर से समान रूप से संपीडित हो जाता है। द्रव द्वारा लगाया गया बल पिण्ड के पृष्ठ के प्रत्येक बिंदु पर लंबवत् दिशा में कार्य करता है; ऐसी स्थिति में पिण्ड को जलीय संपीडन की स्थिति में कहा जाता है। इससे ज्यामितीय आकृति में किसी परिवर्तन के बिना ही आयतन में कमी हो जाती है। पिण्ड के अंदर आंतरिक प्रत्यानयन बल उत्पन्न हो जाते हैं जो द्रव द्वारा लगाए गए बलों के बराबर तथा विरोधी होते हैं (द्रव से बाहर निकालने पर पिण्ड अपनी प्रारंभिक आकृति तथा आकार को पुनः प्राप्त कर लेता है)। इस स्थिति में एकांक क्षेत्रफल पर आंतरिक प्रत्यानयन बल को **जलीय प्रतिबल** कहते हैं और इसका मान जलीय दाब (एकांक क्षेत्रफल पर लगने वाला बल) के बराबर होता है।

जलीय दाब के कारण उत्पन्न विकृति को **आयतन विकृति** कहते हैं। इसे आयतन में परिवर्तन (ΔV) तथा प्रारंभिक आयतन (V) के अनुपात से परिभाषित करते हैं :

$$\text{आयतन विकृति} = \frac{\Delta V}{V} \qquad (8.5)$$

चूंकि विकृत प्रारंभिक विमा तथा विमा में अंतर का अनुपात होता है, इसलिए इसका कोई इकाई या विमीय सूत्र नहीं होता है।

8.3 हुक का नियम

चित्र 8.1 में दिखाई गई विभिन्न स्थितियों में प्रतिबल तथा विकृति के अलग-अलग रूप हो जाते हैं। कम विरूपण के लिए प्रतिबल तथा विकृति एक दूसरे के अनुक्रमानुपाती होते हैं। यही हुक का नियम कहलाता है। इस प्रकार

$$\text{प्रतिबल} \ \alpha \ \text{विकृति}$$

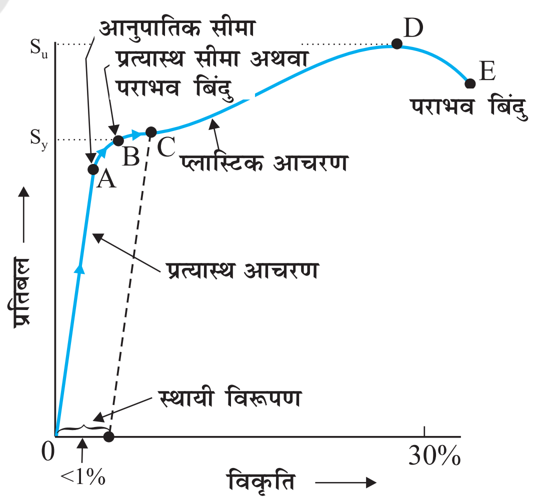
$$\text{प्रतिबल} = k \times \text{विकृति} \qquad (8.6)$$

जहाँ k अनुक्रमानुपातिकता स्थिरांक है और इसे **प्रत्यास्थता गुणांक** कहते हैं।

हुक का नियम एक आनुभाविक नियम है तथा अधिकतर पदार्थों के लिए वैध होता है। तथापि कुछ पदार्थ इस प्रकार रैखिक संबंध नहीं दर्शाते।

8.4 प्रतिबल-विकृति वक्र

तनन प्रतिबल के अंतर्गत किसी दिए गए द्रव्य के लिए प्रतिबल तथा विकृति के बीच संबंध प्रयोग द्वारा जाना जा सकता है। तनन गुणों की मानक जाँच में, किसी परीक्षण बेलन या तार को एक प्रत्यारोपित बल द्वारा विस्तारित किया जाता है। लंबाई में भिन्नात्मक अन्तर (विकृति) तथा इस विकृति को उत्पन्न करने के लिए आवश्यक प्रत्यारोपित बल को रिकार्ड करते हैं। प्रत्यारोपित बल को धीरे-धीरे क्रमबद्ध चरणों में बढ़ाते हैं और लंबाई में परिवर्तन को नोट करते जाते हैं। प्रतिबल (जिसका मान एकांक क्षेत्रफल पर लगाए गए बल के मान के बराबर होता है) और उससे उत्पन्न विकृति के बीच एक ग्राफ खींचते हैं। किसी धातु के लिए ऐसा एक प्रारूपिक ग्राफ चित्र 8.2 में दिखाया गया है। संपीडन तथा अपरूपण प्रतिबल के लिए भी सदृश ग्राफ प्राप्त किए जा सकते हैं। भिन्न-भिन्न द्रव्यों के लिए प्रतिबल-विकृति वक्र भिन्न-भिन्न होते हैं। इन वक्रों की सहायता से हम यह समझ सकते हैं कि कोई दिया हुआ द्रव्य बढ़ते हुए लोड के साथ कैसे विरूपित होता है। ग्राफ से हम यह देख सकते हैं कि O से A के बीच में वक्र रैखिक है। इस क्षेत्र में हुक के नियम का पालन होता है। जब प्रत्यारोपित बल को हटा लिया जाता है तो पिण्ड अपनी प्रारंभिक विमाओं को पुनः प्राप्त कर लेता है। इस क्षेत्र में ठोस एक प्रत्यास्थ पिण्ड जैसा आचरण करता है।

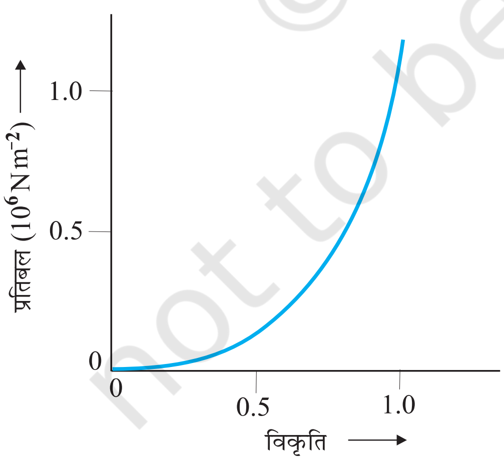


चित्र 8.2 किसी धातु के लिए एक प्रारूपिक प्रतिबल-विकृति वक्र।

A से B के बीच के क्षेत्र में प्रतिबल तथा विकृति अनुक्रमानुपाती नहीं है। फिर भी भार हटाने पर पिण्ड अभी भी अपनी प्रारंभिक विमाओं पर वापस आ जाता है। वक्र में बिंदु B **पराभव बिंदु** (अथवा **प्रत्यास्थ सीमा**) कहलाता है और संगत प्रतिबल को द्रव्य का **पराभव सामर्थ्य** (σ_y) कहते हैं।

यदि भार को और बढ़ा दिया जाए तो उत्पन्न प्रतिबल पराभव सामर्थ्य से अधिक हो जाता है और फिर प्रतिबल में थोड़े से अंतर के लिए भी विकृति तेज़ी से बढ़ती है। वक्र का B और D के बीच का भाग यह दर्शाता है। B और D के बीच किसी बिंदु, मान लें C, पर जब भार को हटा दिया जाए तो पिण्ड अपनी प्रारंभिक विमा को पुनः प्राप्त नहीं करता है। इस स्थिति में जब प्रतिबल शून्य हो जाए तब भी विकृति शून्य नहीं होती है। तब यह कहा जाता है कि द्रव्य में **स्थायी विरूपण** हो गया। ऐसे विरूपण को **प्लास्टिक विरूपण** कहते हैं। ग्राफ पर बिंदु D द्रव्य की **चरम तनन सामर्थ्य** (σ_u) है। इस बिंदु के आगे प्रत्यारोपित बल को घटाने पर भी अतिरिक्त विकृति उत्पन्न होती है और बिंदु E पर विभंजन हो जाता है। यदि चरम सामर्थ्य बिंदु D और विभंजन बिंदु E पास-पास हों तो द्रव्य को **भंगुर** कहते हैं। यदि वे अधिक दूरी पर हों तो द्रव्य को **तन्य** कहते हैं।

जैसा पहले कहा जा चुका है, प्रतिबल-विकृति व्यवहार में एक द्रव्य से दूसरे द्रव्य में अंतर हो जाता है। उदाहरण के लिए, रबड़ को अपनी प्रारंभिक लंबाई के कई गुने तक खींचा जा सकता है, फिर भी वह अपनी प्रारंभिक आकृति में वापस आ जाता है। चित्र 8.3 में रबड़ जैसे द्रव्य, महाधमनी का प्रत्यास्थ ऊतक, के लिए प्रतिबल-विकृति वक्र दिखाया गया है। ध्यान दें कि यद्यपि प्रत्यास्थ क्षेत्र बहुत अधिक है फिर भी यह द्रव्य हुक के नियम का बिलकुल भी पालन नहीं करता है। इसमें कोई सुस्पष्ट प्लैस्टिक क्षेत्र भी नहीं है। महाधमनी, रबड़ जैसे पदार्थ जिन्हें तनित करके अत्यधिक विकृति पैदा की जा सकती है, **प्रत्यस्थालक** कहलाते हैं।



चित्र 8.3 महाधमनी, हृदय से रक्त को ले जाने वाली वृहत नलिका (वाहिका), के प्रत्यास्थ ऊतक के लिए प्रतिबल-विकृति वक्र।

8.5 प्रत्यास्थता गुणांक

संरचनात्मक तथा निर्माण अभियांत्रिकी डिज़ाइन के लिए प्रतिबल-विकृति वक्र में प्रत्यास्थ सीमा के अंदर का अनुक्रमानुपाती क्षेत्र (चित्र 8.2 में क्षेत्र OA) बहुत महत्वपूर्ण होता है। प्रतिबल तथा विकृति के अनुपात को **प्रत्यास्थता गुणांक** कहते हैं और किसी दिए हुए द्रव्य के लिए इसका एक विशिष्ट मान होता है।

8.5.1 यंग गुणांक

प्रायोगिक प्रेक्षण यह दर्शाते हैं कि प्रतिबल चाहे तनक हो या चाहे संपीडक, उत्पन्न विकृति का मान समान होता है। तनक (या संपीडक) प्रतिबल (σ) तथा अनुदैर्घ्य विकृति (ε) के अनुपात से **यंग गुणांक** को परिभाषित करते हैं तथा इसे प्रतीक 'Y' द्वारा निरूपित करते हैं :

$$Y = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{8.7}$$

समीकरणों (8.1) और (8.2) से

$$Y = (F/A)/(\Delta L/L)$$
$$= (F \times L)/(A \times \Delta L) \tag{8.8}$$

चूंकि विकृति एक विमाविहीन राशि है, यंग गुणांक की इकाई वही होती है जो प्रतिबल की, अर्थात्, N m^{-2} या पास्कल (Pa)। सारणी 8.1 में कुछ द्रव्यों के यंग गुणांक तथा पराभव सामर्थ्य के मान दिए गए हैं।

सारणी 8.1 में दिए गए आँकड़ों से यह पता चलता है कि धातुओं के लिए यंग गुणांक अधिक होता है। इसलिए इन पदार्थों में लंबाई में थोड़ा ही अंतर उत्पन्न करने के लिए बहुत अधिक बल की आवश्यकता होती है। 0.1 cm^2 अनुप्रस्थ परिच्छेद के एक पतले इस्पात के तार की लंबाई को 0.1% से बढ़ाने के लिए 2000 N के बल की आवश्यकता होती है। उसी अनुप्रस्थ परिच्छेद के ऐलुमिनियम, पीतल तथा ताँबे के तारों में उतनी ही विकृति उत्पन्न करने के लिए आवश्यक बल क्रमशः 690 N, 900 N तथा 1100 N होते हैं। इसका अर्थ

सारणी 8.1 कुछ द्रव्यों के यंग गुणांक तथा पराभव सामर्थ्य

पदार्थ	घनत्व ρ (kg m^{-3})	यंग गुणांक Y (10^9 N m^{-2})	चरम सामर्थ्य σ_u (10^6 N m^{-2})	पराभव सामर्थ्य σ_y (10^6 N m^{-2})
ऐलुमिनियम	2710	70	110	95
ताँबा	8890	110	400	200
लोहा (पिटवाँ)	7800-7900	190	330	170
इस्पात	7860	200	400	250
काँच#	2190	65	50	-
कंक्रीट	2320	30	40	-
लकड़ी#	525	13	50	-
अस्थि#	1900	9.4	170	-
पॉलीस्टीरीन	1050	3	48	-

 # पदार्थ का परीक्षण संपीडन के अंतर्गत किया गया

यह है कि ताँबा, पीतल तथा ऐलुमिनियम से इस्पात अधिक प्रत्यास्थ होता है। इसी कारण से अधिक काम ली जाने वाली मशीनों और संरचनात्मक डिज़ाइनों में इस्पात को अधिक वरीयता दी जाती है। लकड़ी, अस्थि, कंक्रीट तथा काँच के यंग गुणांक कम होते हैं।

उदाहरण 8.1 एक संरचनात्मक इस्पात की छड़ की त्रिज्या 10 mm तथा लंबाई 1 m है। 100 kN का एक बल F इसको लंबाई की दिशा में तनित करता है। छड़ में (a) प्रतिबल, (b) विस्तार, तथा (c) विकृति की गणना कीजिए। संरचनात्मक इस्पात का यंग गुणांक 2.0×10^{11} N m^{-2} है।

हल हम यह मान लेंगे कि छड़ को एक सिरे पर क्लैम्प करके रखा गया है और बल को दूसरे सिरे पर छड़ की लंबाई की दिशा में लगाया गया है तो छड़ पर प्रतिबल होगा

$$\text{प्रतिबल} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi r^2}$$

$$= \frac{100 \times 10^3 \,\text{N}}{3.14 \times \left(10^{-2}\,\text{m}\right)^2}$$

$$= 3.18 \times 10^8 \text{ N m}^{-2}$$

विस्तार होगा,

$$\Delta L = \frac{(F/A)L}{Y}$$

$$= \frac{\left(3.18 \times 10^8 \,\text{N m}^{-2}\right)(1\,\text{m})}{2 \times 10^{11}\,\text{N m}^{-2}}$$

$$= 1.59 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$= 1.59 \text{ mm}$$

विकृति होगी

$$\text{विकृति} = \Delta L/L$$

$$= (1.59 \times 10^{-3} \text{ m})/(1 \text{ m})$$

$$= 1.59 \times 10^{-3}$$

$$= 0.16 \,\%$$

उदाहरण 8.2 ताँबे का एक 2.2 m लंबा तार तथा इस्पात का एक 1.6 m लंबा तार, जिनमें दोनों के व्यास 3.0 mm हैं, सिरे से जुड़े हुए हैं। जब इसे एक भार से तनित किया गया तो कुल विस्तार 0.7 mm हुआ। लगाए गए भार का मान प्राप्त कीजिए।

हल ताँबे और इस्पात के तार उतने ही तनक प्रतिबल के अंतर्गत हैं क्योंकि उन पर समान तनाव (भार W के बराबर) लगा है तथा उनके अनुप्रस्थ परिच्छेद के क्षेत्रफल A बराबर हैं। समीकरण (8.7) से हम जानते हैं कि प्रतिबल = विकृति × यंग गुणांक, इसलिए

$$W/A = Y_c \times (\Delta L_c/L_c) = Y_s \times (\Delta L_s/L_s)$$

जहाँ पादाक्षर c तथा s क्रमश: ताँबे तथा इस्पात को संदर्भित करते हैं। अथवा,

$$\Delta L_c/\Delta L_s = (Y_s/Y_c) \times (L_c/L_s)$$

दिया है, $L_c = 2.2$ m, $L_s = 1.6$ m

सारणी 8.1 से $Y_c = 1.1 \times 10^{11}$ N m^{-2} और

$Y_s = 2.0 \times 10^{11}$ N m^{-2}। इसलिए

$\Delta L_c / \Delta L_s = (2.0 \times 10^{11} / 1.1 \times 10^{11}) \times (2.2/1.6) = 2.5$

कुल विस्तार दिया हुआ है

$$\Delta L_c + \Delta L_s = 7.0 \times 10^{-4} \text{ m}$$

ऊपर दिए गए समीकरणों को हल करने पर

$\Delta L_c = 5.0 \times 10^{-4}$ m, तथा $\Delta L_s = 2.0 \times 10^{-4}$ m

इसलिए,

$$W = (A \times Y_c \times \Delta L_c)/L_c$$
$$= \pi\,(1.5 \times 10^{-3})^2 \times [1.1 \times 10^{11} \times (5.0 \times 10^{-4})/2.2]$$
$$= 1.8 \times 10^2 \text{ N}$$

उदाहरण 8.3 किसी सर्कस में एक मानवीय पिरैमिड में एक संतुलित ग्रुप का सारा भार एक व्यक्ति, जो अपनी पीठ के बल लेटा हुआ है, के पैरों पर आधारित है (जैसा चित्र 8.4 में दिखाया गया है)। इस कार्य का निष्पादन करने वाले सभी व्यक्तियों, मेजों, प्लाकों आदि का कुल द्रव्यमान 280 kg है। पिरैमिड की तली पर अपनी पीठ के बल लेटे हुए व्यक्ति का द्रव्यमान 60 kg है। इस व्यक्ति की प्रत्येक उर्वस्थि (फीमर) की लंबाई 50 cm तथा प्रभावी त्रिज्या 2.0 cm है। निकालिए कि अतिरिक्त भार के कारण प्रत्येक उर्वस्थि कितनी मात्रा से संपीडित हो जाती है।

चित्र 8.4 सर्कस में एक मानवीय पिरैमिड।

हल सभी निष्पादकों, मेजों, प्लाकों आदि का कुल द्रव्यमान = 280 kg

आधार देने वाले निष्पादक का द्रव्यमान = 60 kg

पिरैमिड की तली के निष्पादक के पैरों पर आधारित द्रव्यमान = 280 – 60 = 220 kg

इस आधारित द्रव्यमान का भार

= 220 kg wt = 220 × 8.8 N = 2156 N

निष्पादक की प्रत्येक उर्वस्थि पर आधारित भार

= – (2156) N = 1078 N

सारणी 8.1 से अस्थि का यंग गुणांक,

$Y = 8.4 \times 10^9$ N m^{-2}

प्रत्येक उर्वस्थि की लंबाई $L = 0.5$ m तथा त्रिज्या = 2.0 cm

इस प्रकार उर्वस्थि के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल

$A = \pi \times (2 \times 10^{-2})^2$ m^2 = 1.26×10^{-3} m^2

प्रत्येक उर्वस्थि में संपीडन (ΔL) की गणना समीकरण (8.8) का इस्तेमाल करके की जा सकती है :

$$\Delta L = [(F \times L)/(Y \times A)]$$
$$= [(1078 \times 0.5)/(8.4 \times 10^9 \times 1.26 \times 10^{-3})]$$
$$= 4.55 \times 10^{-5} \text{ m या } 4.55 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

यह बहुत कम अंतर है। उर्वस्थि में भिन्नात्मक कमी होगी $\Delta L / L = 0.000091$ या 0.0091%

8.5.2 अपरूपण गुणांक

अपरूपण प्रतिबल तथा संगत अपरूपण विकृति का अनुपात द्रव्य का **अपरूपण गुणांक** कहलाता है तथा इसे G से निरूपित करते हैं। इसे **दृढ़ता गुणांक** भी कहते हैं :

G = अपरूपण प्रतिबल (σ_s)/अपरूपण विकृति

$$G = (F/A)/(\Delta x/L)$$
$$= (F \times L)/(A \times \Delta x) \qquad (8.9)$$

इसी प्रकार समीकरण (8.4) से

$$G = (F/A)/\theta$$
$$= F/(A \times \theta) \qquad (8.10)$$

अपरूपण प्रतिबल σ_s को ऐसे भी व्यक्त किया जा सकता है

$$\sigma_s = G \times \theta \qquad (8.11)$$

अपरूपण गुणांक की SI इकाई N m^{-2} या Pa होती है। सारणी 8.2 में कुछ साधारण द्रव्यों के अपरूपण गुणांक दिए गए हैं। यह देखा जा सकता है कि अपरूपण गुणांक (या दृढ़ता गुणांक) आमतौर पर यंग गुणांक (सारणी 8.1) से कम होता है। अधिकतर द्रव्यों के लिए $G \approx Y/3$।

सारणी 8.2 कुछ सामान्य द्रव्यों के अपरूपण गुणांक *(G)*

द्रव्य	G (10^9 Nm^{-2} या GPa)
ऐलुमिनियम	25
पीतल	36
ताँबा	42
काँच	23
लोहा	70
सीसा	5.6
निकिल	77
इस्पात	84
टंगस्टन	150
लकड़ी	10

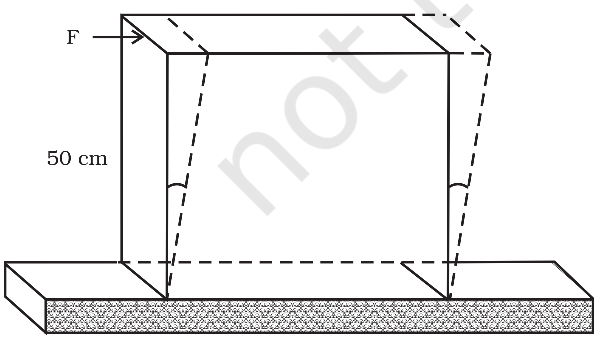
उदाहरण 8.4 *सीसे के 50 cm भुजा के एक वर्गाकार स्लैब, जिसकी मोटाई 10 cm है, की पतली फलक पर 8.0×10^4 N का एक अपरूपक बल लगा है। दूसरा पतला फलक फर्श से रिवेट किया हुआ है। ऊपरी फलक कितनी विस्थापित हो जाएगी?*

हल सीसे का स्लैब स्थिर है तथा बल को पतली फलक के समांतर लगाया गया है, जैसा चित्र 8.5 में दिखाया गया है। इस फलक का क्षेत्रफल है

$$A = 50 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} = 0.5 \text{ m} \times 0.1 \text{ m} = 0.05 \text{ m}^2$$

इसलिए

$$\text{प्रतिबल} = (8.4 \times 10^4 \text{ N}/0.05 \text{ m}^2) = 1.80 \times 10^6 \text{ N m}^{-2}$$



चित्र 8.5

हम जानते हैं कि अपरूपण विकृति = $(\Delta x/L)$ = प्रतिबल / G

इसलिए, विस्थापन Δx = (प्रतिबल $\times L$)/G

$= (1.8 \times 10^6 \text{ N m}^{-2} \times 0.5 \text{ m})/(5.6 \times 10^9 \text{ N m}^{-2})$

$= 1.6 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.16 \text{ mm}$

8.5.3 आयतन गुणांक

पहले के खंड (8.2) में हम यह देख चुके हैं कि जब किसी पिण्ड को अधिक दाब के एक द्रव में डुबोया जाता है [चित्र 8.1(d)] तो वह जलीय प्रतिबल (जलीय दाब के मान के बराबर) के अंतर्गत चला जाता है। यह पिण्ड के आयतन में कमी उत्पन्न करता है, इस प्रकार एक विकृति, जिसे आयतन विकृति कहते हैं, उत्पन्न होती है (समीकरण 8.5)। जलीय प्रतिबल तथा संगत आयतन विकृति के अनुपात को *आयतन गुणांक* कहते हैं। यह प्रतीक B से निरूपित किया जाता है :

$$B = -p/(\Delta V/V) \qquad (8.12)$$

ऋण चिह्न इस तथ्य की ओर संकेत करता है कि दाब में वृद्धि करने पर आयतन में कमी होती है। अर्थात्, यदि p धनात्मक है तो ΔV ऋणात्मक होगा। इस प्रकार साम्यावस्था में किसी निकाय के लिए आयतन गुणांक B का मान सदा धनात्मक होगा। आयतन गुणांक की SI इकाई वही होती है जो दाब की, अर्थात्, N m^{-2} या Pa। कुछ सामान्य द्रव्यों के आयतन गुणांक सारणी 8.3 में दिए गए हैं।

आयतन गुणांक के व्युत्क्रम को *संपीड्यता* कहते हैं तथा इसे k से निरूपित करते हैं। दाब में एकांक वृद्धि पर आयतन में भिन्नात्मक अंतर से इसे परिभाषित करते हैं :

$$k = (1/B) = -(1/\Delta p) \times (\Delta V/V) \qquad (8.13)$$

सारणी 8.3 में दिए गए आँकड़ों से यह देख सकते हैं कि ठोसों के आयतन गुणांक द्रवों से कहीं अधिक हैं और द्रवों के लिए इसका मान गैसों (वायु) की तुलना में कहीं अधिक है। इस प्रकार ठोस पदार्थ सबसे कम संपीड्य होते हैं जबकि गैसें सबसे अधिक संपीड्य होती हैं। गैसें ठोसों की अपेक्षा लगभग दस लाख गुनी अधिक संपीड्य होती हैं। गैसों की संपीड्यता अधिक होती है जो ताप तथा दाब के साथ बदलती है। ठोसों की असंपीड्यता मुख्यतया आस-पास के परमाणुओं के बीच दृढ़ युग्मन के कारण होती है। द्रवों के अणु भी अपने पास के अणुओं से बँध होते हैं लेकिन उतने मजबूती से नहीं जितने ठोसों में। गैसों के अणु अपने पास के अणुओं से बहुत हलके से युग्मित होते हैं।

सारणी 8.3 कुछ सामान्य द्रव्यों के आयतन गुणांक *(B)*

द्रव्य	B (10^9 N m^{-2} या GPa)
ठोस	
ऐलुमिनियम	72
पीतल	61
ताँबा	140
काँच	37
लोहा	100
निकिल	260
इस्पात	160
द्रव	
जल	2.2
इथेनाल	0.9
कार्बन डाइसल्फाइड	1.56
ग्लिसरीन	4.76
पारा	25
गैस	
वायु मानक (मानक ताप एवं दाब पर)	1.0×10^{-4}

सारणी 8.4 में विभिन्न प्रकार के प्रतिबल, विकृति, प्रत्यास्थ गुणांक तथा द्रव्यों की वह अवस्था जिसमें यह लागू होते हों, को एक दृष्टि में दिखाया गया है।

उदाहरण 8.5 हिन्द महासागर की औसत गहराई लगभग 3000 m है। महासागर की तली में पानी के भिन्नात्मक संपीडन $\Delta V/V$ की गणना कीजिए, दिया है कि पानी का आयतन गुणांक 2.2×10^9 N m^{-2} है (g = 10 m s^{-2} लीजिए)।

हल तली की परत पर पानी के 3000 m ऊँचे स्तंभ द्वारा लगने वाला दाब

$$p = h\rho g = 3000 \text{ m} \times 1000 \text{ kg m}^{-3} \times 10 \text{ m s}^{-2}$$
$$= 3 \times 10^7 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$$
$$= 3 \times 10^7 \text{ N m}^{-2}$$

भिन्नात्मक संपीडन $\Delta V/V$ होगा

$$\Delta V/V = \text{प्रतिबल}/B$$
$$= (3 \times 10^7 \text{ N m}^{-2})/(2.2 \times 10^9 \text{ N m}^{-2})$$
$$= 1.36 \times 10^{-2} \text{ या } 1.36\,\%$$

8.5.4 प्वासों अनुपात

प्रयुक्त बल के लम्बवत दिशा में होने वाली विकृति को **पार्श्विक विकृति** कहते हैं। सिमोन प्वासों ने यह निर्धारित किया था कि प्रत्यास्थता सीमा में पार्श्विक विकृति अनुदैर्घ्य विकृति के समानुपाती होती है। किसी तानित तार में पार्श्विक विकृति तथा अनुदैर्घ्य विकृति का अनुपात **प्वासों अनुपात** कहलाता है। यदि किसी तार का मूल व्यास d तथा प्रयुक्त प्रतिबल की दशा में व्यास में संकुचन Δd है, तो पार्श्विक विकृति $\Delta d/d$ होगी। यदि इस तार की मूल लंबाई L तथा प्रयुक्त प्रतिबल की स्थिति में लंबाई में वृद्धि ΔL है, तो अनुदैर्घ्य विकृति $\Delta L/L$ है। अतः प्वासों अनुपात $(\Delta d/d)/(\Delta L/L)$ अथवा $(\Delta d/\Delta L) \times (L/d)$ होगा। प्वासों अनुपात दो विकृतियों का अनुपात है। अतः यह एक संख्या है तथा इसकी कोई विमा अथवा मात्रक नहीं होता। इसका मान पदार्थ की प्रकृति पर ही निर्भर करता है। स्टील के लिए इस अनुपात का मान 0.28 तथा 0.30 के मध्य होता है। एल्युमीनियम की मिश्रधातुओं के लिए इसका मान लगभग 0.33 होता है।

8.5.6 तानित तार में प्रत्यास्थ स्थैतिक ऊर्जा

जब किसी तार पर तनन प्रतिबल आक्षेपित किया जाता है, तो अंत:परमाण्विक बलों के विरुद्ध कार्य किया जाता है। यह कार्य तार में प्रत्यास्थ स्थैतिक ऊर्जा के रूप में संग्रहित हो जाता है। कोई L मूल लंबाई तथा A अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल के एक तार की लंबाई के परित: किसी विकृतकारी बल F लगाने पर माना कि लंबाई में l वृद्धि हो जाती है, तब समीकरण (8.8) से हमें $F = YA \times (l/L)$ प्राप्त होता है। यहाँ Y तार के पदार्थ का यंग गुणांक है। अब इस तार की लंबाई में अत्यन्त सूक्ष्म dl मात्रा से पुन: वृद्धि कराने के लिए प्रयुक्त कार्य dW का मान $F \times dl$ अथवा $YAl\,dl/L$ होगा। अत: किसी तार को उसकी मूल लंबाई L से $L + l$ तक अर्थात् $l = 0$ से $l = l$ तक बढ़ाने में किया गया कार्य (W) –

$$W = \int_0^l \frac{YAl}{L} dl = \frac{YA}{2} \times \frac{l^2}{L}$$

$$W = \frac{1}{2} \times Y \times \left(\frac{l}{L}\right)^2 \times AL$$

सारणी 8.4 प्रतिबल, विकृति तथा विभिन्न प्रत्यास्थ गुणांक

प्रतिबल का प्रकार	प्रतिबल	विकृति	अन्तर आकृति में	आयतन में	प्रत्यास्थ गुणांक	गुणांक का नाम	द्रव्य की अवस्था
तनक अथवा संपीडक ($\sigma = F/A$)	सम्मुख पृष्ठों के लंबवत् दो बराबर और विरोधी बल	बल की दिशा में विस्तार या संपीडन अनुदैर्घ्य विकृति ($\Delta L/L$)	हाँ	नहीं	$Y = (F\times L)/(A\times\Delta L)$	यंग गुणांक	ठोस
अपरूपक ($\sigma_s = F/A$)	सम्मुख पृष्ठों के समांतर दो बराबर और विरोधी बल (प्रत्येक स्थिति में बल ऐसे लगें ताकि पिण्ड पर कुल बल तथा कुल बल आघूर्ण शून्य हो जाए)	शुद्ध अपरूपण, θ	हाँ	नहीं	$G = F/(A\times\theta)$	अपरूपण गुणांक या दृढ़ता गुणांक	ठोस
जलीय	पृष्ठ पर सभी जगह लंबवत् बल, सभी जगह एकांक क्षेत्रफल पर बल (दाब) का मान बराबर	आयतन में अंतर (संपीडन या विस्तार) ($\Delta V/V$)	नहीं	हाँ	$B = -p/(\Delta V/V)$	आयतन गुणांक	ठोस, द्रव तथा गैस

$$= \frac{1}{2} \times \text{यंग गुणांक} \times \text{विकृति}^2 \times \text{तार का आयतन}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{प्रतिबल} \times \text{विकृति} \times \text{तार का आयतन}$$

यह कार्य तार में प्रत्यास्थ स्थैतिक ऊर्जा (U) के रूप में संग्रहित हो जाती है। अत: तार में पदार्थ की प्रति एकांक आयतन प्रत्यास्थ स्थैतिक ऊर्जा (u) निम्न है –

$$u = \frac{1}{2} \times \sigma\varepsilon \qquad (8.14)$$

8.6 द्रव्यों के प्रत्यास्थ व्यवहार के अनुप्रयोग

दैनिक जीवन में द्रव्यों के प्रत्यास्थ व्यवहार की अहम भूमिका होती है। सभी अभियांत्रिकी डिज़ाइनों में द्रव्यों के प्रत्यास्थ व्यवहार के परिशुद्ध ज्ञान की आवश्यकता होती है। उदाहरण के लिए किसी भवन की डिज़ाइन करते समय स्तंभों, दंडों तथा आधारों की संरचनात्मक डिज़ाइन के लिए प्रयुक्त द्रव्यों की प्रबलता का ज्ञान आवश्यक है। क्या आपने कभी इस पर विचार किया है कि पुलों की संरचना में आधार के रूप में प्रयुक्त दंडों का अनुप्रस्थ परिच्छेद **I** की तरह का क्यों होता है? बालू का एक ढेर या एक पहाड़ी पिरैमिड की आकृति का क्यों होता है? इन प्रश्नों के उत्तर संरचनात्मक अभियांत्रिकी के अध्ययन से पाए जा सकते हैं।

भारी भारों को उठाने तथा एक स्थान से दूसरे स्थान तक ले जाने के लिए प्रयुक्त क्रेनों में धातु का एक मोटा रस्सा होता है जिससे भार को जोड़ दिया जाता है। रस्से को मोटरों तथा घिरनियों की मदद से खींचा जाता है। मान लें कि हमें एक ऐसा क्रेन बनाना है जिसको उठा सकने की सामर्थ्य 10 मीट्रिक टन (1metric ton = 1000 kg) हो। इस्पात का रस्सा कितना मोटा होना चाहिए? स्पष्टतया, हम यह चाहते हैं कि भार रस्से को स्थायी रूप से विरूपित न कर दे। इसलिए विस्तार प्रत्यास्थ सीमा से अधिक नहीं होना चाहिए। सारणी 8.1 से हमें पता चलता है कि मृदु इस्पात का पराभव सामर्थ्य (σ_y) लगभग 300×10^6 N m^{-2} है। इस प्रकार रस्से के अनुप्रस्थ परिच्छेद का क्षेत्रफल का न्यूनतम मान है :

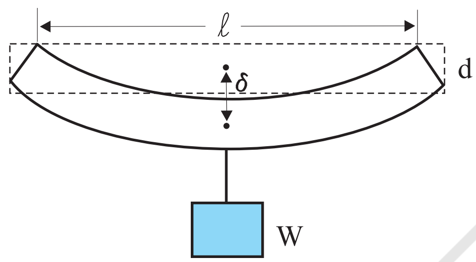
$$A \geq W/\sigma_y = Mg/\sigma_y \qquad (8.15)$$
$$= (10^4 \text{ kg} \times 10 \text{ m s}^{-2})/(300 \times 10^6 \text{ N m}^{-2})$$
$$= 3.3 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

जो वृत्ताकार परिच्छेद के रस्से के लिए लगभग 1 cm त्रिज्या के संगत बनता है। साधारणतया, सुरक्षा के लिए भार में एक बड़ा मार्जिन (लगभग दस के गुणक का) दिया जाता है। इस तरह लगभग 3 cm त्रिज्या का एक मोटा रस्सा संस्तुत किया जाता है। इस त्रिज्या का एकल तार व्यावहारिक रूप से एक दृढ़ छड़ हो जाएगा। इसलिए व्यापारिक निर्माण में लचक तथा प्रबलता के लिए ऐसे रस्सों को हमेशा वेणी की तरह बहुत से पतले तारों को गुम्फित करके आसानी से बनाया जाता है।

किसी पुल को इस प्रकार डिज़ाइन करना होता है जिससे यह चलते हुए यातायात के भार को, पवन बल को तथा अपने

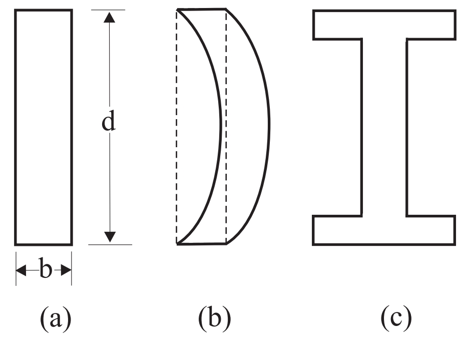
भार को वहन कर सके। इसी प्रकार, भवनों की डिज़ाइन में दण्डों एवं स्तंभों का उपयोग बहुत प्रचलित है। दोनों ही स्थितियों में, भार के अंतर्गत दण्ड के बंकन की समस्या से छुटकारा पाना बहुत ही महत्वपूर्ण होता है। दण्ड को अत्यधिक बंकित होना या टूटना नहीं चाहिए। हम किसी ऐसे दण्ड के बारे में विचार करें जो सिरों के पास आधारित हो तथा जिसके मध्य बिंदु पर भार लगा हो, जैसा चित्र 8.6 में दिखाया गया है। लंबाई l, चौड़ाई b तथा मोटाई d की एक पट्टी के मध्य बिंदु पर भार W का भार लगाने से इसमें एक झोल आएगा जिसकी मात्रा होगी

$$\delta = W\,l^3/(4bd^3Y) \qquad (8.16)$$



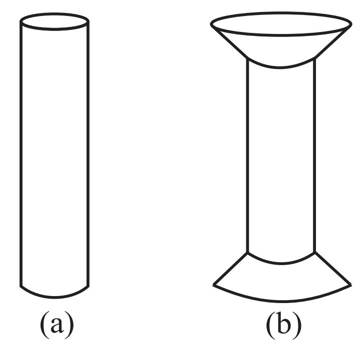
चित्र 8.6 सिरों पर आधारित तथा केन्द्र पर भारित एक दण्ड।

थोड़ा सा कैलकुलस और जितना आप पहले ही पढ़ चुके हैं, उसका उपयोग करके इस संबंध का निगमन किया जा सकता है। समीकरण (8.15) से हम देखते हैं कि किसी दिये हुए भार के लिए बंकन कम करने के लिए ऐसे द्रव्य का उपयोग करना चाहिए जिसका यंग गुणांक Y अधिक हो। किसी दिये हुए द्रव्य के लिए बंकन कम करने के लिए चौड़ाई b की बजाय मोटाई d को बढ़ाना अधिक प्रभावी होता है क्योंकि δ, d^{-3} लेकिन b^{-1} के अनुक्रमानुपाती होता है (यद्यपि दण्ड की लंबाई यथासम्भव कम होनी ही चाहिए)। लेकिन जब तक ऐसा न हो कि भार बिलकुल ठीक स्थान पर लगा हो (पर चलते हुए यातायात वाले पुल पर ऐसा व्यवस्थित करना कठिन है), मोटाई बढ़ाने पर पट्टी ऐसे बंकित हो सकती है जैसा चित्र 8.7(b) में दिखाया गया है। इसे आकुंचन कहते हैं। इससे बचने के लिए साधारणतया चित्र 8.7(c) में दिखाई गई आकृति का अनुप्रस्थ परिच्छेद लिया जाता है। ऐसे परिच्छेद से भार वहन करने के लिए बड़ा पृष्ठ तथा बंकन रोकने के लिए पर्याप्त मोटाई मिलती है। इस प्रकार की आकृति से प्रबलता को न्योछावर किये बिना ही दण्ड के भार को कम किया जा सकता है, अतः लागत भी कम हो जाती है।



चित्र 8.7 किसी दण्ड की विभिन्न अनुप्रस्थ परिच्छेद आकृतियाँ (a) एक पट्टी का आयताकार परिच्छेद, (b) एक पतली पट्टी और कैसे आकुंचित हो सकती है, (c) भार वहन करने वाली पट्टी के लिए साधारणतया प्रयुक्त परिच्छेद।

भवनों तथा पुलों में खम्भों या स्तम्भों का उपयोग भी बहुत प्रचलित है। गोल सिरों वाले खम्भे जैसा चित्र 8.8(a) में दिखाये गये हैं, फैलावदार आकृति चित्र 8.8(b) वाले खम्भों की अपेक्षा कम भार वहन कर सकते हैं। किसी पुल या भवन की परिशुद्ध डिज़ाइन करते समय उन बातों का ध्यान रखना पड़ता है कि वह किन परिस्थितियों में काम करता है, लागत क्या होगी और संभावित द्रव्यों आदि की दीर्घकालीन विश्वसनीयता आदि क्या है?



चित्र 8.8 खम्भे या स्तम्भः (a) गोलीय सिरों का खम्भा, (b) फैलावदार सिरों का खम्भा।

पृथ्वी पर किसी पर्वत की अधिकतम ऊँचाई लगभग 10 km होती है, इस प्रश्न का उत्तर भी चट्टानों के प्रत्यास्थ गुणों पर विचार करने से मिल सकता है। एक पर्वत का आधार समान संपीडन के अन्तर्गत नहीं होता है, यह चट्टानों को कुछ अपरूपक प्रतिबल प्रदान करता है जिसके अन्तर्गत वे प्रवाहित

(खिसक) हो सकती हैं। ऊपर के सारे द्रव्य के कारण प्रतिबल उस क्रान्तिक अपरूपक प्रतिबल से कम होना चाहिए जिस पर चट्टानें प्रवाहित हों (खिसकें)।

ऊँचाई h के किसी पर्वत की तली पर, पर्वत के भार के कारण एकांक क्षेत्रफल पर लगने वाला बल $h\rho g$ होता है जहाँ ρ पर्वत के द्रव्यमान का घनत्व है तथा g गुरुत्वीय त्वरण है। तली पर का द्रव्य ऊर्ध्वाधर दिशा में इस बल का अनुभव करता है, लेकिन पर्वत के किनारे स्वतंत्र हैं। इसलिए यह दाब या आयतन संपीडन जैसी स्थिति नहीं है। यहाँ एक अपरूपक अवयव है जो लगभग $h\rho g$ ही है। अब, किसी प्रारूपिक चट्टान की प्रत्यास्थ सीमा 30×10^7 N m^{-2} होती है। इसे $h\rho g$ के बराबर रखने पर जहाँ $\rho = 3 \times 10^3$ kg m^{-3}, हम पाते हैं कि

$$h\rho g = 30 \times 10^7 \text{ N m}^{-2}$$

$$\text{या, } h = 30 \times 10^7 \text{ N m}^{-2}/(3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} \times 10 \text{ m s}^{-2})$$

$$\simeq 10 \text{ km}$$

जो माउन्ट एवरेस्ट की ऊँचाई से ज़्यादा है।

सारांश

1. एकांक क्षेत्रफल पर प्रत्यानयन बल प्रतिबल होता है तथा विमा में भिन्नात्मक अन्तर विकृति होता है। आम तौर पर तीन प्रकार के प्रतिबल होते हैं (a) तनक प्रतिबल — अनुदैर्घ्य प्रतिबल (तनन से संबद्ध) या संपीडक प्रतिबल (संपीडन से संबद्ध), (b) अपरूपक प्रतिबल, तथा (c) जलीय प्रतिबल।
2. कम विरूपण के लिए अधिकतर पदार्थों में प्रतिबल विकृति के अनुक्रमानुपाती होता है। इसे हुक का नियम कहते हैं। अनुक्रमानुपातिकता का स्थिरांक प्रत्यास्थता गुणांक कहलाता है। विरूपण बलों के लगने पर पिण्डों की प्रतिक्रिया और प्रत्यास्थ व्यवहार का वर्णन करने के लिए तीन प्रत्यास्थता गुणांकों – यंग गुणांक, अपरूपण गुणांक तथा आयतन गुणांक का उपयोग किया जाता है।

   ठोसों का एक वर्ग, जो प्रत्यास्थलक कहलाता है, हुक के नियम का पालन नहीं करता है।
3. जब कोई पिण्ड तनाव या संपीडन के अंतर्गत होता है तो हुक के नियम का रूप होता है

   $$F/A = Y\Delta L/L,$$

   जहाँ $\Delta L/L$ पिण्ड की तनन या संपीडन विकृति है, F विकृति उत्पन्न करने वाले प्रत्यारोपित बल का मान है, A अनुप्रस्थ परिच्छेद का वह वह क्षेत्रफल है जिस पर F प्रत्यारोपित होता है (A के लंबवत) और Y पिण्ड के द्रव्य का यंग गुणांक है। प्रतिबल F/A है।
4. जब दो बल ऊपरी और निचली फलकों के समान्तर लगाये जाते हैं तो ठोस पिण्ड इस प्रकार विरूपित होता है कि ऊपरी फलक निचली फलक के सापेक्ष बगल की ओर विस्थापित होती है। ऊपरी फलक का क्षैतिज विस्थापन ΔL ऊर्ध्वाधर ऊँचाई L के लंबवत होता है। इस प्रकार का विरूपण अपरूपण कहलाता है और संगत प्रतिबल अपरूपण प्रतिबल होता है। इस प्रकार का प्रतिबल केवल ठोसों में ही संभव है।

   इस प्रकार के विरूपण के लिए हुक के नियम का रूप हो जाता है

   $$F/A = G \times \Delta L/L$$

   जहाँ ΔL पिण्ड के एक सिरे का प्रत्यारोपित बल F की दिशा में विस्थापित है और G अपरूपण गुणांक है।
5. जब कोई पिण्ड परिवर्ती द्रव द्वारा लगाये गये प्रतिबल के कारण जलीय संपीडन में जाता है तो हुक के नियम का रूप निम्न हो जाता है

   $$p = B\,(\Delta V/V),$$

   जहाँ p पिण्ड पर द्रव के कारण दाब (जलीय प्रतिबल) है, $\Delta V/V$ (आयतन विकृति) उस दाब के कारण पिण्ड के आयतन में भिन्नात्मक अन्तर और B पिण्ड का आयतन गुणांक होता है।

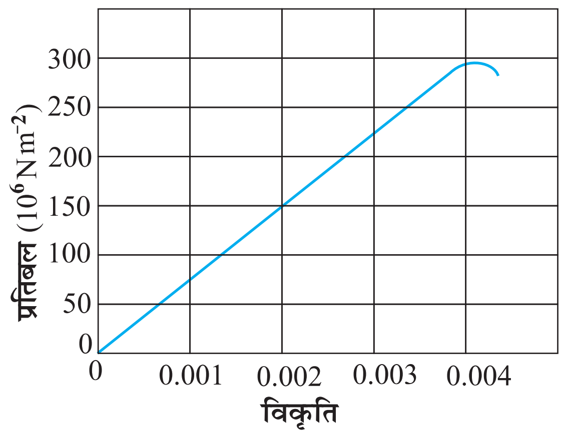
विचारणीय विषय

1. किसी तार को एक छत से लटकाया गया है तथा उसे दूसरे सिरे पर भार *(F)* लगाकर तनित किया गया है। छत द्वारा इस तार पर आरोपित बल भार के बराबर और विपरीत होता है। परन्तु तार के किसी परिच्छेद A पर तनाव F होता है ना कि $2F$। अत: तनन प्रतिबल, जो प्रति इकाई क्षेत्रफल पर तनाव है, F/A होता है।
2. हुक का नियम प्रतिबल-विकृति वक्र के केवल रैखिक भाग में ही वैध है।
3. यंग प्रत्यास्थता गुणांक तथा अपरूपण गुणांक केवल ठोसों के लिए ही प्रासंगिक होते हैं, इसका कारण यह है कि केवल ठोसों की ही लंबाई तथा आकृति होती है ।
4. आयतन प्रत्यास्थता गुणांक ठोसों, द्रवों तथा गैसों सभी के लिए प्रासंगिक होता है। यह उस स्थिति में आयतन में परिवर्तन से संबंधित है जब पिण्ड का प्रत्येक भाग समान प्रतिबल के अंतर्गत होता है ताकि पिण्ड की आकृति ज्यों की त्यों बनी रहे।
5. धातुओं के लिए यंग गुणांक का मान मिश्र धातुओं और प्रत्यास्थलकों की अपेक्षा अधिक होता है। यंग गुणांक के अधिक मान वाले द्रव्यों में लंबाई में थोड़ा परिवर्तन करने के लिए अधिक बल की आवश्यकता होती है।
6. दैनिक जीवन में हमारी यह धारणा होती है कि जो द्रव्य अधिक तनित होते हैं, वे अधिक प्रत्यास्थ होते हैं, लेकिन यह मिथ्या है। वास्तव में वे द्रव्य जो दिए हुए भार के लिए कम तनित होते हैं, अधिक प्रत्यास्थ समझे जाते हैं।
7. व्यापक रूप में, किसी एक दिशा में आरोपित विरूपक बल अन्य दिशाओं में भी विकृति उत्पन्न कर सकता है। ऐसी परिस्थितियों में प्रतिबल एवं विकृति के बीच आनुपातिकता का वर्णन केवल एक प्रत्यास्थता नियतांक द्वारा नहीं किया जा सकता। उदाहरण के लिए, अनुदैर्घ्य विकृति के अंतर्गत, अनुप्रस्थ विमा (परिच्छेद की त्रिज्या) में भी थोड़ा अंतर हो जाएगा जिसका वर्णन द्रव्य के दूसरे प्रत्यास्थता नियतांक से करते हैं (जिसे प्वायसां अनुपात कहते हैं)।
8. प्रतिबल एक सदिश राशि नहीं है क्योंकि बल की तरह प्रतिबल किसी विशेष दिशा से निर्धारित नहीं किया जा सकता। किसी पिण्ड के एक भाग पर किसी काट की निश्चित ओर कार्यरत बल की एक निश्चित दिशा होती है।

अभ्यास

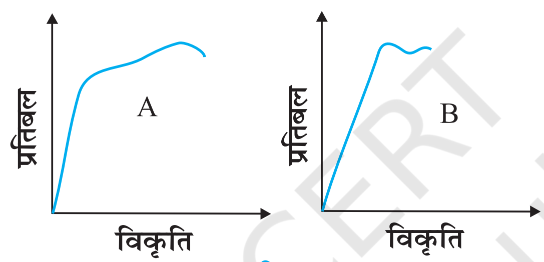
8.1 4.7 m लंबे व 3.0×10^{-5} m^2 अनुप्रस्थ काट के स्टील के तार तथा 3.5 m लंबे व 4.0×10^{-5} m^2 अनुप्रस्थ काट के ताँबे के तार पर दिए गए समान परिमाण के भारों को लटकाने पर उनकी लंबाइयों में समान वृद्धि होती है । स्टील तथा ताँबे के यंग प्रत्यास्थता गुणांकों में क्या अनुपात है?

8.2 नीचे चित्र 8.9 में किसी दिए गए पदार्थ के लिए प्रतिबल-विकृति वक्र दर्शाया गया है। इस पदार्थ के लिए (a) यंग प्रत्यास्थता गुणांक, तथा (b) सन्निकट पराभव सामर्थ्य क्या है?



चित्र 8.9

8.3 दो पदार्थों A और B के लिए प्रतिबल-विकृति ग्राफ चित्र 8.10 में दर्शाए गए हैं।



चित्र 8.10

इन ग्राफों को एक ही पैमाना मानकर खींचा गया है।

(a) किसी पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक अधिक है?

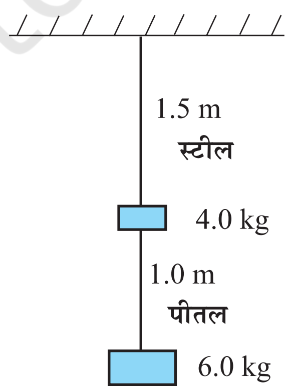
(b) दोनों पदार्थों में कौन अधिक मजबूत है?

8.4 निम्नलिखित दो कथनों को ध्यान से पढ़िये और कारण सहित बताइये कि वे सत्य हैं या असत्य :

(a) इस्पात की अपेक्षा रबड़ का यंग गुणांक अधिक है;

(b) किसी कुण्डली का तनन उसके अपरूपण गुणांक से निर्धारित होता है।

8.5 0.25 cm व्यास के दो तार, जिनमें एक इस्पात का तथा दूसरा पीतल का है, चित्र 8.11 के अनुसार भारित हैं। बिना भार लटकाये इस्पात तथा पीतल के तारों की लंबाइयाँ क्रमशः 1.5 m तथा 1.0 m हैं। यदि इस्पात तथा पीतल के यंग गुणांक क्रमशः 2.0×10^{11} Pa तथा 0.91×10^{11} Pa हों तो इस्पात तथा पीतल के तारों में विस्तार की गणना कीजिए।



चित्र 8.11

8.6 ऐलुमिनियम के किसी घन के किनारे 10 cm लंबे हैं। इसकी एक फलक किसी ऊर्ध्वाधर दीवार से कसकर जड़ी हुई है। इस घन के सम्मुख फलक से 100 kg का एक द्रव्यमान जोड़ दिया गया है। एलुमिनियम का अपरूपण गुणांक 25 GPa है। इस फलक का ऊर्ध्वाधर विस्थापन कितना होगा?

8.7 मृदु इस्पात के चार समरूप खोखले बेलनाकार स्तम्भ 50,000 kg द्रव्यमान के किसी बड़े ढाँचे को आधार दिये हुए हैं। प्रत्येक स्तम्भ की भीतरी तथा बाहरी त्रिज्याएँ क्रमशः 30 तथा 60 cm हैं। भार वितरण को एकसमान मानते हुए प्रत्येक स्तम्भ की संपीडन विकृति की गणना कीजिये।

8.8 ताँबे का एक टुकड़ा, जिसका अनुप्रस्थ परिच्छेद $15.2 \text{ mm} \times 19.1 \text{ mm}$ का है, 44,500 N बल के तनाव से खींचा जाता है, जिससे केवल प्रत्यास्थ विरूपण उत्पन्न हो। उत्पन्न विकृति की गणना कीजिये।

8.9 1.5 cm त्रिज्या का एक इस्पात का केबिल भार उठाने के लिए इस्तेमाल किया जाता है। यदि इस्पात के लिए अधिकतम अनुज्ञेय प्रतिबल 10^8 N m^{-2} है तो उस अधिकतम भार की गणना कीजिए जिसे केबिल उठा सकता है।

8.10 15 kg द्रव्यमान की एक दृढ़ पट्टी को तीन तारों, जिनमें प्रत्येक की लंबाई 2 m है, से सममित लटकाया गया है। सिरों के दोनों तार ताँबे के हैं तथा बीच वाला लोहे का है। तारों के व्यासों के अनुपात निकालिए, प्रत्येक पर तनाव उतना ही रहना चाहिए।

8.11 एक मीटर अतानित लंबाई के इस्पात के तार के एक सिरे से 14.5 kg का द्रव्यमान बाँध कर उसे एक ऊर्ध्वाधर वृत्त में घुमाया जाता है, वृत्त की तली पर उसका कोणीय वेग 2rev/s है। तार के अनुप्रस्थ परिच्छेद का क्षेत्रफल 0.065 cm^2 है। तार में विस्तार की गणना कीजिए जब द्रव्यमान अपने पथ के निम्नतम बिंदु पर है।

8.12 नीचे दिये गये आँकड़ों से जल के आयतन प्रत्यास्था गुणांक की गणना कीजिए; प्रारंभिक आयतन = 100.0 L दाब में वृद्धि = 100.0 atm ($1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$), अंतिम आयतन = 100.5 L। नियत ताप पर जल तथा वायु के आयतन प्रत्यास्थता गुणांकों की तुलना कीजिए। सरल शब्दों में समझाइये कि यह अनुपात इतना अधिक क्यों है।

8.13 जल का घनत्व उस गहराई पर, जहाँ दाब 80.0 atm हो, कितना होगा? दिया गया है कि पृष्ठ पर जल का घनत्व $1.03 \times 103 \text{ kg m}^{-3}$, जल की संपीडता $45.8 \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$ ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N m}^{-2}$)

8.14 काँच के स्लेब पर 10 atm का जलीय दाब लगाने पर उसके आयतन में भिन्नात्मक अंतर की गणना कीजिए।

8.15 ताँबे के एक ठोस घन का एक किनारा 10 cm का है। इस पर $7.0 \times 10^6 \text{ Pa}$ का जलीय दाब लगाने पर इसके आयतन में संकुचन निकालिए।

8.16 एक लीटर जल पर दाब में कितना अंतर किया जाए कि वह 0.10% से संपीडित हो जाए?

अध्याय 9

11089CH10

तरलों के यांत्रिकी गुण

9.1 भूमिका
9.2 दाब
9.3 धारारेखी प्रवाह
9.4 बर्नूली का सिद्धांत
9.5 श्यानता
9.6 पृष्ठ तनाव

सारांश
विचारणीय विषय
अभ्यास

9.1 भूमिका

इस अध्याय में हम द्रवों तथा गैसों के कुछ सामान्य भौतिक गुणों का अध्ययन करेंगे। द्रव तथा गैस प्रवाहित होती हैं अतः तरल कहलाती है। मूल रूप में इस गुण के आधार पर हम द्रवों एवं गैसों का ठोसों से विभेद करते हैं।

हमारे चारों ओर हर स्थान पर तरल हैं। पृथ्वी के ऊपर वायु का आवरण है और इसके पृष्ठ का दो-तिहाई भाग जल से आच्छादित है। जल केवल हमारे जीवन के अस्तित्व के लिए ही आवश्यक नहीं है वरन् सभी स्तनपायी जंतुओं के शरीर का अधिकांश भाग जल है। पौधों सहित सभी सजीवों में होने वाली समस्त प्रक्रियाओं में तरलों की परोक्ष भूमिका होती है। अतः तरलों के व्यवहार व गुणों को समझना बहुत महत्त्वपूर्ण है।

तरल ठोसों से कैसे भिन्न हैं? द्रवों तथा गैसों में क्या-क्या समानता है? ठोसों के विपरीत तरल की अपनी कोई निश्चित आकृति नहीं होती। ठोसों एवं द्रवों का निश्चित आयतन होता है जबकि गैस पात्र के कुल आयतन को भर देती है। पिछले अध्याय में हमने पढ़ा है कि प्रतिबल द्वारा ठोसों के आयतन में परिवर्तन किया जा सकता है। ठोस, द्रव अथवा गैस का आयतन इस पर लगने वाले प्रतिबल अथवा दाब पर निर्भर है। जब हम ठोस या द्रव के निश्चित आयतन की बात करते हैं, तब हमारा तात्पर्य वायुमंडलीय दाब के अधीन आयतन से होता है। गैसों की तुलना में बाह्य दाबांतर से ठोस या द्रव के आयतन में परिवर्तन बहुत कम होता है। दूसरे शब्दों में गैसों की अपेक्षा ठोस एवं द्रवों की संपीड्यता काफी कम होती है।

अपरूपण (विरूपण) प्रतिबल ठोस के आयतन में परिवर्तन किए बिना उसकी आकृति बदल सकता है। तरलों का मूल गुण यह है कि वह विरूपण प्रतिबल का बहुत ही न्यून प्रतिरोध करते हैं। फलतः थोड़े से विरूपण प्रतिबल लगाने से भी उनकी आकृति बदल जाती है। ठोसों की अपेक्षा तरलों का अपरूपक प्रतिबल लगभग दस लाखवाँ कम होता है।

9.2 दाब

जब एक नुकीली सुई हमारी त्वचा में दाब लगाकर रखी जाती है, तो वह त्वचा को बेध देती है। परन्तु किसी अधिक संपर्क क्षेत्र की वस्तु (जैसे चम्मच का

पिछला भाग) को उतने ही बल से दबाएँ तो हमारी त्वचा अपरिवर्तित रहती है। यदि किसी व्यक्ति की छाती पर कोई हाथी अपना पैर रख दे तो उसकी पसलियाँ टूट जाएँगी। सर्कस में यह करतब दिखाने वाले की छाती पर मजबूत लकड़ी का तख्ता रखा जाता है अत: वह इस दुर्घटना से बच जाता है। दैनिक जीवन के इस प्रकार के अनुभवों से हमें विश्वास हो जाता है कि बल के साथ-साथ जिस क्षेत्र पर वह बल आरोपित किया जाता है उसका क्षेत्रफल भी महत्त्वपूर्ण होता है। वह क्षेत्र जिस पर बल कार्य कर रहा है जितना छोटा होगा उसका प्रतिघात उतना ही अधिक होगा। यह प्रतिघात 'दाब' कहलाता है।

जब कोई पिण्ड किसी शांत तरल में डूबा हुआ है, तो तरल उस पिण्ड पर बल आरोपित करता है। यह बल सदैव पिण्ड के पृष्ठों के अभिलंबवत् होता है। ऐसा इसलिए है कि, यदि बल का अवयव पिण्ड के पृष्ठ के समांतर होता है तो न्यूटन के तृतीय नियमानुसार, पिण्ड भी अपने सतह के समांतर तरल पर बल आरोपित करता है। यह बल तरल को पृष्ठ के समांतर बहने के लिए बाध्य करता है। यह संभव नहीं है, क्योंकि तरल विश्रामावस्था में है। अत: विरामावस्था में तरल द्वारा लगने वाला बल पिण्ड के संपर्क पृष्ठ के अभिलंब ही आरोपित हो सकता है। इसे चित्र 9.1(a) में दर्शाया गया है।

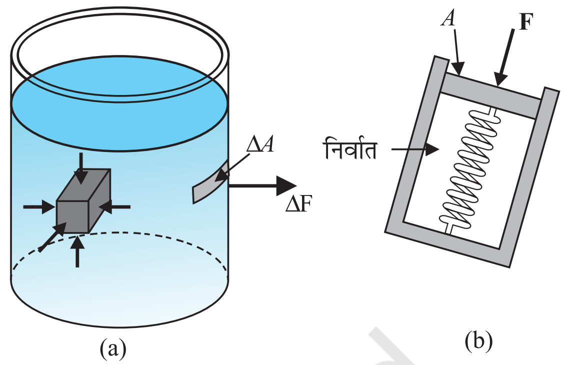
तरल द्वारा किसी बिंदु पर कार्यरत इस अभिलंब बल को मापा जा सकता है। ऐसा ही एक दाब मापक युक्ति के आदर्श रूप को चित्र 9.1(b) में दर्शाया गया है। इस युक्ति में एक निर्वातित चैम्बर होता है, जिससे एक कमानी जुड़ी होती है। इस कमानी का अंशांकन पहले से ही इसके पिस्टन पर लगे बल को मापने के लिए कर लिया जाता है। इस युक्ति को तरल के अंदर के किसी बिंदु पर रखा जाता है। पिस्टन पर तरल द्वारा आरोपित बल को कमानी द्वारा पिस्टन पर आरोपित बल से संतुलित करके तरल द्वारा पिस्टन पर आरोपित बल को माप लेते हैं। यदि तरल द्वारा A क्षेत्रफल के पिस्टन पर आरोपित अभिलंब बल का परिमाण F है, तो **औसत दाब** P_{av} को बल तथा क्षेत्रफल के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है

अत:

$$P_{av} = \frac{F}{A} \tag{9.1}$$

सैद्धांतिक रूप में पिस्टन के क्षेत्रफल को मनमाने ढंग से छोटा किया जा सकता है। तब सीमित अर्थों में दाब को इस प्रकार परिभाषित करते हैं :

$$P = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \tag{9.2}$$



चित्र 9.1 (a) बीकर के द्रव में डूबे पिण्ड अथवा उसकी दीवारों पर द्रव द्वारा आरोपित बल पिण्ड के पृष्ठ के हर बिंदु के लंबवत् कार्य करता है। (b) दाब मापने के लिए युक्ति का आदर्श रूप।

दाब एक अदिश राशि है। यहाँ हम आपको यह याद दिलाना चाहते हैं कि समीकरणों (9.1) तथा (9.2) के अंश में दृष्टिगोचर होने वाली राशि संबंधित क्षेत्र के अभिलंबवत् बल का अवयव है न कि (सदिश) बल। इसकी विमाएँ $[ML^{-1}T^{-2}]$ हैं। दाब का मात्रक N m^{-2} है। फ्रांसीसी वैज्ञानिक ब्लेज़ी पास्कल (1623-1662) ने तरल दाब क्षेत्र में पुरोगामी अध्ययन किया। इसलिए उनके सम्मान में दाब के SI मात्रक का नाम पास्कल (pascal, प्रतीक Pa) रखा गया है। दाब का एक अन्य सामान्य मात्रक वायुमण्डल (atmosphere, प्रतीक atm) अर्थात् समुद्र तल पर वायुमंडल द्वारा आरोपित दाब, है (1 atm = 1.013×10^5 Pa)।

तरलों का वर्णन करने के लिए घनत्व (ρ) एक ऐसी भौतिक राशि है जिसके विषय में चर्चा करना अनिवार्य है। V आयतन वाले m संहति के किसी तरल का घनत्व

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{9.3}$$

घनत्व की विमाएँ $[ML^{-3}]$ हैं। इसका SI मात्रक kg m^{-3} है। यह एक धनात्मक अदिश राशि है। द्रव असंपीड्य होते हैं, अत: किसी द्रव का घनत्व सभी दाबों पर लगभग अचर रहता है। इसके विपरित, गैसें दाब में परिवर्तन के साथ घनत्व में अत्यधिक परिवर्तन दर्शाती हैं।

4 °C (277 K) पर जल का घनत्व 1.0×10^3 kg m^{-3} है। किसी पदार्थ का आपेक्षिक घनत्व (विशिष्ट गुरुत्व) उस

पदार्थ के घनत्व तथा जल के 4 °C पर घनत्व का अनुपात होता है। यह विमाहीन धनात्मक अदिश भौतिक राशि है। उदाहरण के लिए ऐलुमिनियम का आपेक्षिक घनत्व 2.7 है। जबकि इसका घनत्व 2.7×10^3 kg m^{-3} है। सारणी 9.1 में कुछ सामान्य तरलों के घनत्व दर्शाए गए हैं।

सारणी 9.1 कुछ सामान्य तरलों के घनत्व मानक ताप तथा वायुमंडलीय दाब (STP) पर*

तरल	घनत्व ρ (kg m^{-3})
जल	1.00×10^3
समुद्र जल	1.03×10^3
पारा	13.6×10^3
ऐथिल एल्कोहॉल	0.806×10^3
संपूर्ण रक्त	1.06×10^3
वायु	1.29
ऑक्सीजन	1.43
हाइड्रोजन	9.0×10^{-2}
अंतरातारकीय आकाश	$\approx 10^{-20}$

उदाहरण 9.1 दो उर्वस्थितियाँ (फीमर) जिनमें प्रत्येक की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 10 cm^2 है, 40 kg संहति के मानव शरीर के ऊपरी भाग को सँभालती हैं। उर्वस्थितियों द्वारा सहन किए जाने वाले औसत दाब का आकलन कीजिए।

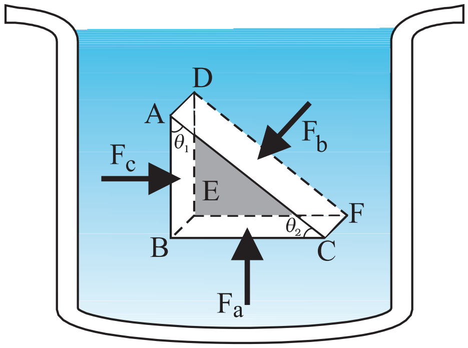
हल उर्वस्थियों की कुल अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल $A = 2 \times 10$ cm^2 $= 20 \times 10^{-4}$ m^2। उर्वस्थियों पर कार्यरत बल F = 40 kg wt = 400 N (g = 10 m s^{-2} लेने पर)। यह बल ऊर्ध्वाधर नीचे की दिशा में कार्य करता है, अतः यह उर्वस्थियों पर अभिलंबवत् लगता है। इसीलिए औसत दाब

$$P_{av} = \frac{F}{A} = 2 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$$

9.2.1 पास्कल का नियम

फ्रांसीसी वैज्ञानिक ब्लेज पास्कल ने पाया कि यदि सभी बिंदु एक ही ऊँचाई पर हों तो विराम स्थिति के तरल के सभी बिंदुओं पर दाब समान होगा। इस सत्य को भली भाँति सरल रूप में दर्शाया जा सकता है।

* STP का अर्थ मानक ताप 0 °C तथा दाब 1 atm है।



चित्र 9.2 *पास्कल के नियम का परीक्षण। ABC-DEF विराम स्थिति के किसी तरल के अभ्यन्तर का कोई अवयव है। यह अवयव इतना छोटा है कि गुरुत्व के प्रभाव की उपेक्षा की जा सकती है, परन्तु स्पष्टता के लिए इसे प्रवर्धित दर्शाया गया है।*

चित्र 9.2 में विराम स्थिति के किसी तरल के अभ्यन्तर में कोई अवयव दर्शाया गया है। यह अवयव ABC-DEF एक समकोण प्रिज़्म के रूप में है। प्रिज़्मीय अवयव आकार में बहुत छोटा है इसलिए इसका प्रत्येक बिंदु तरल के पृष्ठ के समान गहराई पर माना जा सकता है और इसलिए प्रत्येक बिंदु पर गुरुत्व का प्रभाव समान होगा। परन्तु इस सिद्धान्त को स्पष्ट करने के लिए हमने इस अवयव को बड़ा करके दर्शाया है। इस अवयव पर आपतित बल शेष तरल के कारण है और जैसा कि ऊपर दर्शाया गया है तरल के कारण आरोपित बल पृष्ठों के अभिलंब कार्य करते हैं। अतः चित्र में दर्शाये अनुसार तरल द्वारा इस अवयव पर आरोपित दाबों P_a, P_b तथा P_c के तदनरूपी बल F_a, F_b तथा F_c क्रमशः फलकों BEFC, ADFC तथा ADEB पर अभिलंबवत् आपतित होते हैं जैसा कि चित्र 9.2 में दर्शाया गया है। फलकों BEFC, ADFC तथा ADEB को A_a, A_b तथा A_c से क्रमशः व्यक्त करते हैं। तब

$F_b \sin\theta = F_c$, $F_b \cos\theta = F_a$ (साम्यावस्था से)

$A_b \sin\theta = A_c$, $A_b \cos\theta = A_a$ (ज्यामिती से)

इस प्रकार

$$\frac{F_b}{A_b} = \frac{F_c}{A_c} = \frac{F_a}{A_a}; \quad P_b = P_c = P_a \tag{9.4}$$

अतः विरामावस्था में द्रव के अभ्यन्तर में सभी दिशाओं में दाब समान रूप से कार्य करता है। हमें यह पुनः याद दिलाता है कि अन्य प्रकार के प्रतिबलों की भाँति ही दाब सदिश नहीं है। इसे कोई दिशा नहीं दी जा सकती। विरामावस्था में दाब, तरल के भीतर के किसी क्षेत्रफल (अथवा परिबद्ध तरल) पर अभिलंबवत् होता है चाहे क्षेत्रफल किसी भी अवस्थिति में हो।

तरल के एक अवयव की कल्पना करो जो एक समान अनुप्रस्थ काट वाले छड़ के समरूप है। यह छड़ साम्य अवस्था में है। इसके दोनों सिरों पर कार्यरत क्षैतिज बल साम्य अवस्था में होने चाहिए। अर्थात् दोनों सिरों पर समान दाब होना चाहिए। इससे सिद्ध होता है कि साम्य अवस्था में क्षैतिज तल में द्रव के सभी बिंदुओं पर समान दाब है। माना कि द्रव के विभिन्न भागों पर समान दाब नहीं है, तब द्रव पर नेट बल के कारण वह बहेगा। अतः बहाव की अनुपस्थिति में किसी क्षैतिज तल पर तरल में प्रत्येक स्थान पर समान दाब होना चाहिए।

9.2.2 गहराई के साथ दाब में परिवर्तन

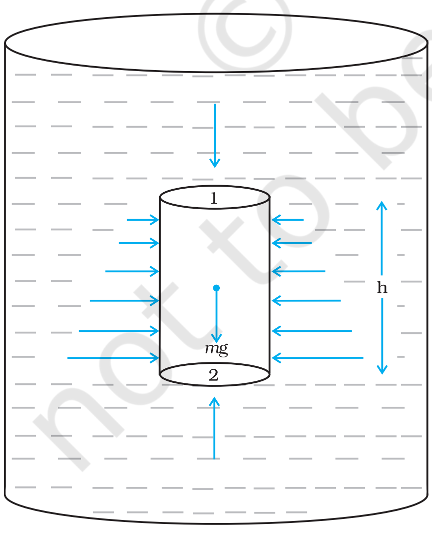
एक पात्र में द्रव की विरामावस्था पर विचार करें। चित्र 9.3 में बिंदु 1 बिंदु 2 से h ऊँचाई पर है। बिंदु 1 व 2 पर दाब क्रमशः P_1 तथा P_2 हैं। A आधार क्षेत्रफल तथा h ऊँचाई के तरल के एक बेलनाकार अवयव को लें। चूँकि तरल विरामावस्था में है अतः परिणामी क्षैतिज बल शून्य होना चाहिए। परिणामी ऊर्ध्वाधर दिशा में कार्यरत बल तरल अवयव के भार के तुल्य होना चाहिए। नीचे की ओर कार्य करने वाला ऊपरी सिरे पर तरल के दाब द्वारा बल (P_1A) तथा पैंदी पर ऊपर की ओर कार्य करने वाला बल (P_2A) है। यदि बेलन में तरल का भार mg है तो

$$(P_2 - P_1)\,A = mg \qquad (9.5)$$

अब यदि ρ तरल का घनत्व है तो उसकी संहति

$m = \rho V = \rho hA$ होगी, इसलिए

$$P_2 - P_1 = \rho gh \qquad (9.6)$$



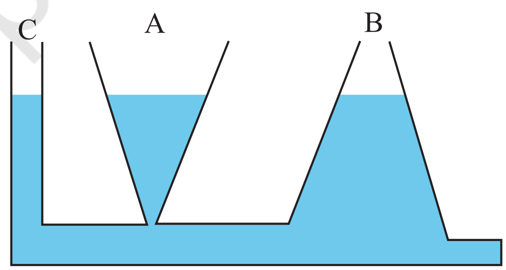
चित्र 9.3 तरल के ऊर्ध्वाधर बेलनी स्तंभ पर दाब के द्वारा गुरुत्व का प्रभाव दिखाया गया है।

बिन्दु 1 व 2 में दाबांतर उनके बीच ऊर्ध्वाधर दूरी h, तरल के घनत्व ρ तथा गुरुत्वीय जनित त्वरण g पर निर्भर है। यदि विचारणीय बिंदु 1 को तरल (माना पानी) के शीर्ष फलक पर स्थानांतरित कर दिया जाए जो वायुमण्डल के लिए खुला है तो P_1 को वायुमंडलीय दाब (P_a) द्वारा तथा P_2 को P से प्रतिस्थापित किया जा सकता है। तब समीकरण (9.6) से

$$P = P_a + \rho gh \qquad (9.7)$$

इस प्रकार, वायुमण्डल के लिए खुले पृष्ठ के नीचे दाब P वायुमण्डलीय दाब की अपेक्षा ρgh परिमाण से अधिक होगा। h गहराई पर स्थित किसी बिंदु पर अतिरिक्त दाब $P - P_a$ उस बिंदु पर **गेज़ दाब** कहलाता है।

निरपेक्ष (परम) दाब के समीकरण (9.7) में बेलन का क्षेत्रफल नहीं आ रहा। अतः, दाब परिकलन के लिए तरल के स्तंभ की ऊँचाई महत्त्वपूर्ण है न कि पात्र की आकृति, आधार या अनुप्रस्थ काट। समान क्षैतिज तल (समान गहराई) के सभी बिंदुओं पर द्रव का दाब समान होता है। **द्रवस्थैतिक विरोधोक्ति** के उदाहरण से इस परिणाम को भलीभांति समझा जा सकता है। A, B तथा C विभिन्न आकृतियों के पात्र लें (चित्र 9.4)। पैंदी में एक क्षैतिज पाइप द्वारा इनको जोड़ा जाता है। पानी भरने पर इन तीनों पात्रों में उसका तल समान रहता है यद्यपि इनमें पानी भिन्न-भिन्न मात्रा में होता है। यह इसलिए है कि इनकी तली पर दाब समान रहता है।



चित्र 9.4 द्रवस्थैतिक विरोधोक्ति की व्याख्या। तीन पात्रों A, B और C में समान ऊँचाई तक जल भरा है परन्तु सभी में जल का परिमाण भिन्न-भिन्न है।

उदाहरण 9.2 किसी झील के पृष्ठ से 10 m गहराई पर किसी तैराक पर दाब ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $h = 10$ m तथा $\rho = 1000$ kg m^{-3}

$g = 10$ m s^{-2} लें

समीकरण (9.7) से,

$$P = P_a + \rho gh$$

$= 1.01 \times 10^5$ Pa $+ 1000$ kg m$^{-3} \times 10$ m s$^{-2} \times 10$ m

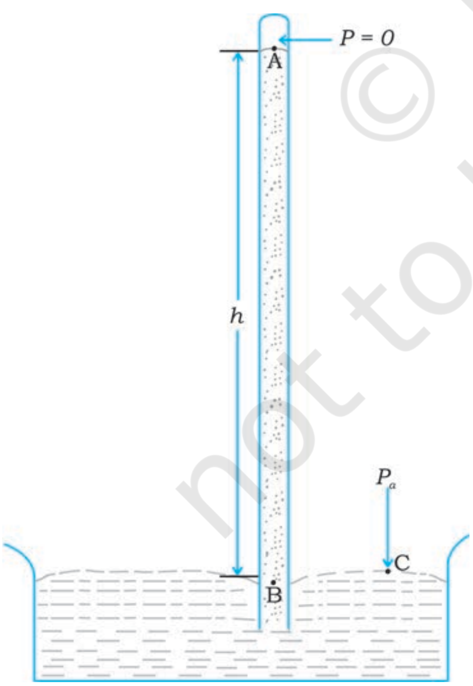
$= 2.01 \times 10^5$ Pa

≈ 2 atm

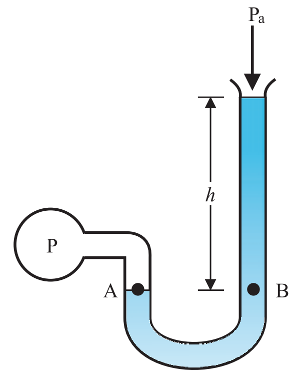
यह दाब खुले पृष्ठ के दाब की तुलना में 100% अधिक है। 1 km गहराई पर दाब में वृद्धि 100 atm होती है। पनडुब्बियों की संरचना इतने अधिक दाबों को सह सकने की क्षमता को ध्यान में रखकर की जाती है। ◀

9.2.3 वायुमण्डलीय दाब तथा गेज दाब

किसी बिंदु पर वायुमण्डलीय दाब उस बिंदु के एकांक अनुप्रस्थ काट वाले क्षेत्रफल पर उस बिंदु से वायुमण्डल के शीर्ष तक की वायु के स्तंभ के भार के बराबर होता है। समुद्र तल पर यह 1.013×10^5 Pa है (1 atm)। वायुमण्डलीय दाब की यथार्थ माप के लिए सर्वप्रथम इटली के वैज्ञानिक इवेंगलिस्टा टॉरिसेली (1608-1647) ने एक युक्ति की रचना की तथा वायुमण्डल दाब को मापा। जैसा कि चित्र 9.5 (a) में दर्शाया गया है, एक सिरे से बंद लंबी काँच की नली लेकर उसमें पारा भरा गया और फिर उसे पारे से आंशिक भरे पात्र में ऊर्ध्वाधर उलटा खड़ा किया गया। इस युक्ति को पारे का बैरोमीटर कहते हैं। नली में पारे से ऊपर का स्थान पारे की वाष्प जिसका दाब P बहुत अल्प होता है, भरा रहता है, यह दाब इतना कम होता है कि इसे नगण्य मान सकते हैं। अत: बिन्दु A पर दाब शून्य होगा। स्तंभ के अन्दर बिंदु B पर दाब समान तल वाले बिंदु C पर दाब के तुल्य होना चाहिए $\left(P_B = P_a\right)$।



(a) पारद वायुदाब मापी



(b) खुली-नली मैनोमीटर (दाबांतर मापी)

चित्र 9.5 दाब मापने की दो युक्तियाँ।

B पर दाब = वायुमण्डल दाब P_a

$$P_a = \rho g h \tag{9.8}$$

जहाँ ρ पारे का घनत्व तथा h नली में पारे के स्तंभ की ऊँचाई है।

प्रयोग में पाया गया कि समुद्र तल पर बैरोमीटर में पारे के स्तंभ की ऊँचाई 76 cm के लगभग होती है जो एक वायुमण्डलीय दाब (1 atm) के तुल्य है। समीकरण (9.8) में ρ का मान भरकर भी इसे प्राप्त किया जा सकता है। सामान्यत: दाब का वर्णन cm अथवा mm (पारा स्तंभ) के पदों में किया जाता है। 1 mm (Hg) दाब का तुल्यांकी दाब 1 टॉर (torr) कहलाता है (टॉरिसेली के सम्मान में)।

1 torr = 133 Pa

औषध विज्ञान तथा शरीर क्रिया विज्ञान (फ़िजिओलॉजी) में दाब के मात्रक के रूप में mm (Hg) तथा टॉर (torr) का उपयोग किया जाता है। मौसम विज्ञान में दाब का सामान्य मात्रक बार (bar) तथा मिलिबार (millibar) लिया जाता है।

1 bar = 10^5 Pa

दाबांतर को मापने के लिए खुली-नली मैनोमीटर एक लाभप्रद उपकरण है। इस युक्ति में एक U आकार की नली होती है जिसमें उपयुक्त द्रव भरा होता है अर्थात् कम दाबांतर मापने के लिए कम घनत्व का द्रव (जैसे तेल) तथा अधिक दाबांतर के लिए अधिक घनत्व का द्रव (जैसे पारा) भरा जाता है। नली का एक सिरा वायुमंडल में खुला छोड़ दिया जाता है तथा दूसरा सिरा जिस निकाय का दाब ज्ञात करना है, उससे जोड़ दिया जाता है। [देखिए चित्र 9.5 (b)]। बिंदु A पर दाब बिंदु B पर दाब के बराबर है। जिस दाब को हम सामान्यत: मापते हैं वह वास्तव में प्रमापी अथवा गेज़ दाब होता है। यह $P - P_a$ के बराबर होता है जो समीकरण (9.8) द्वारा दिया जाता है तथा मैनोमीटर की ऊँचाई h के अनुपाती होता है।

U नली में भरे द्रव के तलों में दोनों ओर समान दाब होता है। दाब तथा ताप के विस्तृत परिसर में द्रव के घनत्व में बहुत कम परिवर्तन होता है। हम प्रस्तुत विवेचन के लिए इसे स्थिर मान सकते हैं। दूसरी ओर दाब तथा ताप परिवर्तन के साथ गैसों के घनत्व में बहुत अधिक परिवर्तन परिलक्षित होता है। अत: गैसों की तुलना में विपरीत द्रवों को अधिकांश रूप से असंपीड्य माना जाता है।

उदाहरण 9.3 समुद्र तल पर वायुमंडल का घनत्व 1.29 kg/m^3 है। यह मानते हुए कि ऊँचाई के साथ घनत्व में कोई परिवर्तन नहीं होता, ज्ञात कीजिए कि वायुमंडल का विस्तार कितनी ऊँचाई तक है?

हल : हम समीकरण (9.8) का उपयोग करते हैं

$\rho g h = 1.29\ \text{kg m}^{-3} \times 9.8\ \text{m s}^{-2} \times h\ \text{m} = 1.01 \times 10^5\ \text{Pa}$

$h = 7989\ \text{m} \approx 8\ \text{km}$

वास्तव में, ऊँचाई के साथ वायु के घनत्व में कमी होती जाती है। ऐसा ही गुरुत्वीय त्वरण g के साथ भी होता है। वायुमण्डलीय आवरण का विस्तार घटते दाब के साथ लगभग 100 km ऊँचाई तक है। हमें यह ध्यान रखना चाहिए कि समुद्र तल पर वायुमंडलीय दाब सदैव ही 760 mm (Hg) नहीं होता। इसमें 10 mm (Hg) अथवा अधिक की कमी तूफान के आने की सूचक होती है।

उदाहरण 9.4 समुद्र के नीचे 1000 m गहराई पर (a) परम दाब कितना है? (b) गेज़ दाब कितना है? (c) इस गहराई पर पनडुब्बी की 20 cm × 20 cm क्षेत्रफल वाली खिड़की (जिसके आंतरिक भाग का दाब समुद्र तल पर वायुमण्डलीय दाब के बराबर रखा गया है) पर आरोपित बल का आकलन कीजिए। (समुद्र जल का घनत्व $1.03 \times 10^3\ \text{kg m}^{-3}$, $g = 10\ \text{m s}^{-2}$)

हल : यहाँ $h = 1000\ \text{m}$ तथा $\rho = 1.03 \times 10^3\ \text{kg m}^{-3}$

(a) समीकरण (9.7) से परम दाब

$P = P_a + \rho g h$

$= 1.01 \times 10^5\ \text{Pa} + 1.03 \times 10^3\ \text{kg m}^{-3} \times 10\ \text{m s}^{-2} \times 1000\ \text{m}$

$= 104.01 \times 10^5\ \text{Pa}$

$\approx 104\ \text{atm}$

(b) गेज़ दाब $= P - P_a = \rho g h \approx P_g$

$P_g = 1.03 \times 10^3\ \text{kg m}^{-3} \times 10\ \text{m s}^{-2} \times 1000\ \text{m}$

$= 103 \times 10^5\ \text{Pa}$

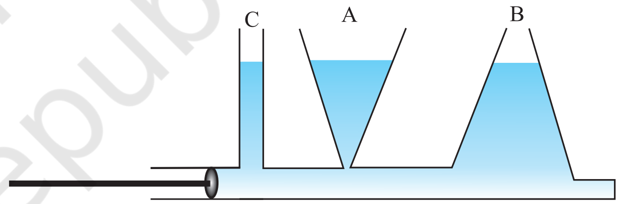
$\approx 103\ \text{atm}$

(c) पनडुब्बी के बाहर दाब $P = P_a + \rho g h$ और अंदर दाब P_a है। इसलिए खिड़की पर आपतित कुल दाब गेज़ दाब $P_g = \rho g h$ है। चूँकि खिड़की का क्षेत्रफल $A = 0.04\ \text{m}^2$ है अत: आपतित बल

$F = P_g A = 103 \times 10^5\ \text{Pa} \times 0.04\ \text{m}^2 = 4.12 \times 10^5\ \text{N}$ ◄

9.2.4 द्रव चालित मशीन

आइये अब हम देखते हैं कि पात्र में रखे तरल पर जब दाब परिवर्तन करते हैं तो क्या होता है? एक क्षैतिज बेलन पर विचार करें जिसमें पिस्टन लगा है तथा उसके विभिन्न बिंदुओं पर तीन ऊर्ध्व ट्यूब लगी हैं [चित्र 9.6(a)] ऊर्ध्व ट्यूब में द्रव स्तंभ की ऊँचाई क्षैतिज बेलन में तरल का दाब दर्शाती है। यह सभी ऊर्ध्व ट्यूबों में अनिवार्यत: समान होती है। यदि पिस्टन को धकेलते हैं तो सभी ट्यूबों में तरल का स्तर उठ जाता है, तथा पुन: यह सभी में समान हो जाता है।

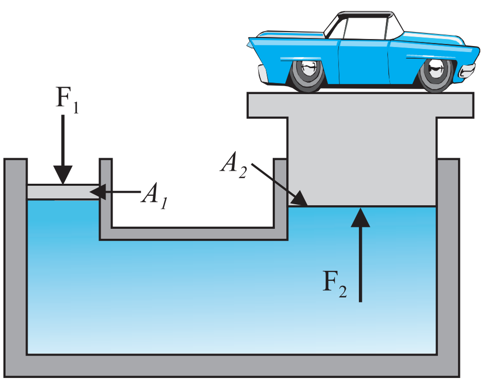


चित्र 9.6 (a) *पात्र में रखे तरल के किसी भाग पर जब बाह्य दाब आपतित होता है, तो यह सभी दिशाओं में समान रूप से संचरित हो जाता है।*

यह दर्शाता है कि जब बेलन पर दाब बढ़ाया जाता है तो यह पूर्ण तरल से समान रूप में वितरित हो जाता है। हम कह सकते हैं कि ***पात्र में रखे तरल के किसी भाग पर जब बाह्य दाब आपतित होता है, तो यह बिना ह्रास के सभी दिशाओं में समान रूप से संचरित हो जाता है।*** यह **"पास्कल के नियम का अन्य रूप"** है तथा दैनिक जीवन में इसके कई उपयोग हैं।

कई युक्तियाँ जैसे **द्रव चालित उत्थापक** और **द्रव चालित ब्रेक** इस नियम पर आधारित हैं। इन युक्तियों में दाब संचरण के लिए तरलों का उपयोग किया जाता है। चित्र 9.6 (b) के अनुसार द्रव चालित उत्थापक में तरल द्वारा भरे स्थान से विलगित दो पिस्टन हैं। अनुप्रस्थ काट A_1 का छोटा पिस्टन द्रव

पर सीधा बल F_1 आरोपित करता है। $P = \frac{F_1}{A_1}$ दाब पूर्ण द्रव में संचरित होता है तथा अनुप्रस्थ काट A_2 के बड़े बेलन जिसमें पिस्टन लगा है पर ऊर्ध्वमुखी बल $P \times A_2$ के रूप में प्राप्त होता है। अतएव, पिस्टन अधिक बल को संतुलित (जैसे प्लेटफॉर्म पर रखे कार या ट्रक के अधिक भार) कर सकता है $F_2 = PA_2 = \frac{F_1 A_2}{A_1}$। A_1 पर बल बदलकर प्लेटफॉर्म को ऊपर या नीचे लाया जा सकता है। इस प्रकार प्रयुक्त बल $\frac{A_2}{A_1}$ गुणक से बढ़ जाता है। यह गुणक युक्ति का **यांत्रिक लाभ** कहलाता है। निम्न उदाहरण इसे स्पष्ट करता है।



(b)

चित्र 9.6 (b) *द्रव चालित उत्थापक, भारी बोझ उठाने की एक युक्ति के कार्य करने के सिद्धांत की व्याख्या का योजनाबद्ध आरेख।*

उदाहरण 9.5 भिन्न-भिन्न अनुप्रस्थ काट वाली दो पिचकारियों में (बिना सुई के) पानी भरा है और इन्हें पानी से भरी रबर नली से कसकर जोड़ दिया गया है। छोटे तथा बड़े पिस्टन के व्यास क्रमश: 1 cm तथा 3 cm हैं। (a) जब छोटे पिस्टन पर 10 N का बल लगाया जाता है तो बड़े पिस्टन पर लगे बल का आकलन कीजिए। (b) यदि छोटे पिस्टन को 6 cm अंदर धक्का दिया जाता है तो बड़ा पिस्टन कितना बाहर चलेगा?

हल : (a) चूँकि बिना ह्रास के दाब संपूर्ण द्रव में संचरित होता है,

$$F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1 = \frac{\pi\left(3/2 \times 10^{-2}\,\text{m}\right)^2}{\pi\left(1/2 \times 10^{-2}\,\text{m}\right)^2} \times 10\,\text{N}$$

$$= 90\ \text{N}$$

(b) पानी पूरा असंपीड्य माना जाता है। छोटे पिस्टन के अन्दर चलने से तुल्य आयतन बड़े पिस्टन द्वारा बाहर की ओर चलने को बाध्य करता है।

$$L_1 A_1 = L_2 A_2$$

$$L_2 = \frac{A_1}{A_2} L_1 = \frac{\pi\left(1/2 \times 10^{-2}\,\text{m}\right)^2}{\pi\left(3/2 \times 10^{-2}\,\text{m}\right)^2} \times 6 \times 10^{-2}\,\text{m}$$

$$\cong 0.67 \times 10^{-2}\,\text{m} = 0.67\ \text{cm}$$

नोट : दोनों पिस्टनों के लिए वायुमण्डलीय दाब उभयनिष्ठ है अत: इसे छोड़ दिया गया है। ◀

उदाहरण 9.6 एक कार उत्थापक में छोटे पिस्टन जिसकी त्रिज्या 5 cm है पर F_1 बल संपीड्य वायु लगाती है। यह दाब 15 cm त्रिज्या वाले दूसरे पिस्टन पर संचरित होता है (चित्र 9.6)। यदि उठाई जाने वाली कार की संहति 1350 kg हो तो F_1 का आकलन कीजिए। इस कार्य को संपन्न करने के लिए आवश्यक दाब क्या है? ($g = 9.8\ \text{ms}^{-2}$)

हल : क्योंकि संपूर्ण तरल में दाब बिना ह्रास के संचरित होता है।

$$F_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2 = \frac{\pi\left(5 \times 10^{-2}\,\text{m}\right)^2}{\pi\left(15 \times 10^{-2}\,\text{m}\right)^2}\left(1350\ \text{kg} \times 9.8\ \text{m s}^{-2}\right)$$

$$= 1470\ \text{N}$$

$$\approx 1.5 \times 10^3\ \text{N}$$

इस बल के संगत वायु दाब

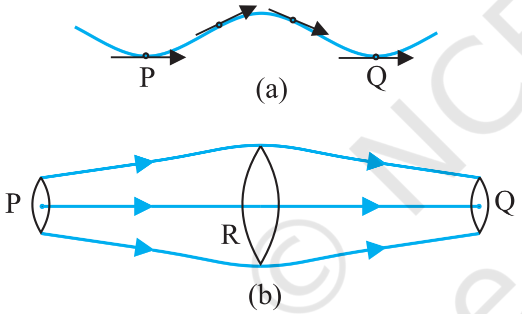
$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{1.5 \times 10^3\,\text{N}}{\pi\left(5 \times 10^{-2}\right)^2\,\text{m}} = 1.9 \times 10^5\,\text{Pa}$$

यह वायुमण्डलीय दाब का लगभग दुगुना है। ◀

मोटर कार में द्रव चालित ब्रेक भी इसी सिद्धांत पर कार्य करते हैं। जब हम अपने पैर से थोड़ा सा बल पैडल पर लगाते हैं तो पिस्टन मास्टर बेलन के अंदर जाता है और उत्पन्न दाब ब्रेक तेल द्वारा पिस्टन के बड़े क्षेत्रफल पर संचरित होता है। पिस्टन पर एक बड़ा बल कार्य करता है। इसके नीचे की ओर ढकेले जाने पर ब्रेक शू फैल कर ब्रेक लाइन को दबाता है। इस प्रकार पैडल पर थोड़ा सा बल पहिए पर अधिक बल मंदन उत्पन्न करता है। इस निकाय का एक प्रमुख लाभ यह है कि पैडल को दबाने से उत्पन्न दाब चारों पहियों से संलग्न बेलनों में समान रूप से संचरित होता है जिससे ब्रेकों का प्रभाव सभी पहियों पर बराबर पड़ता है।

9.3 धारारेखी प्रभाव

अब तक हमने विराम तरलों के बारे में अध्ययन किया। तरल प्रवाह के अध्ययन को तरल गतिकी कहते हैं। जब हम पानी की टोटी को धीरे से खोलते हैं तो आरंभ में पानी उर्मिहीन गति से बहता है। लेकिन जब पानी की गति बढ़ती है तो वह अपनी उर्मिहीन गति को छोड़ देता है। तरलों की गति का अध्ययन करने में हम अपना ध्यान केंद्रित करेंगे कि किसी स्थान पर किसी क्षण विशेष पर, तरल के विभिन्न कणों पर क्या हो रहा है। किसी तरल का प्रवाह **अपरिवर्ती** प्रवाह कहलाता है, यदि किसी स्थान से गुज़रने वाले तरल के प्रत्येक कण का वेग समय में अचर रहता है। इसका अर्थ यह नहीं है कि स्थान के विभिन्न बिंदुओं पर वेग समान है। जैसे-जैसे कोई विशिष्ट कण एक बिंदु से दूसरे बिंदु की ओर अग्रसर होता है, इसका वेग बदल सकता है, अर्थात् किसी दूसरे बिंदु पर कण का वेग भिन्न हो सकता है। परन्तु दूसरे बिंदु से गुज़रने पर कण ठीक वैसा ही व्यवहार करता है जैसा कि वहाँ से ठीक पहले गुजरने वाले कण ने किया। प्रत्येक कण निष्कोण पथ पर चलता है और कणों के पथ एक दूसरे को नहीं काटते।



चित्र 9.7 *धारारेखाओं का अर्थ (a) किसी तरल का प्ररूपी प्रपथ (b) धारारेखी प्रभाव का क्षेत्र।*

किसी तरल अपरिवर्ती प्रवाह में जिस पथ पर कण गमन करता है उसे **धारारेखा** कहते हैं। किसी बिंदु पर तरल कण का वेग सदैव ही धारारेखा के उसी बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा के अनुदिश होता है जो धारारेखा प्रवाह को परिभाषित करता है। जैसा कि चित्र 9.7 (a) में दर्शाया गया है, किसी कण के पथ को लेते है। वक्र यह दर्शाता है कि तरल का कण समय के साथ किस प्रकार गति करता है। वक्र PQ तरल प्रवाह का स्थायी प्रतिचित्र है जो यह दर्शाता है कि तरल किस प्रकार धारारेखा में प्रवाहित होता है। कोई भी दो धारारेखाएँ एक दूसरे को नहीं काटतीं यदि वह ऐसा करती हैं (अर्थात् काटती हैं) तो किसी बिंदु पर तरल का प्रवाह स्थिर नहीं होता तथा एक तरल कण किसी भी दिशा में गति करने लगेगा और प्रवाह अपरिवर्ती नहीं रहेगा। इसलिए अपरिवर्ती प्रवाह में प्रवाह का मानचित्र समय में स्थिर रहता है। हम निकटवर्ती धारारेखाओं को कैसे खींचते हैं? यदि हम प्रत्येक प्रभावित कण की धारारेखा को प्रदर्शित करने की इच्छा रखते हैं तो हम रेखाओं के सांतत्य में सिमट जाएँगे। तरल प्रवाह की दिशा में लंबवत समतलों पर विचार कीजिए अर्थात चित्र 9.7 (b) में तीन बिंदु P, R तथा Q पर। इन समतल खंडों का चुनाव इस प्रकार किया जाता है कि इनकी सीमाएँ धारारेखाओं के समान समूह द्वारा निर्धारित हो जाएँ। इसका अर्थ है कि P, R तथा Q पर दर्शाये गये लंबवत समतल पृष्ठों से प्रवाहित होने वाले तरल कणों की संख्या समान है। इस प्रकार यदि P, R, तथा Q पर तरल कणों के वेग परिमाण क्रमशः v_P, v_R तथा v_Q हैं तथा इन तलों के क्षेत्रफल क्रमशः A_P,A_R और A_Q हैं तो छोटे से समय अंतराल Δt में A_p से गुज़रने वाले तरल की संहति $\rho_P A_P v_P \Delta t$ है। इसी प्रकार A_R से होकर प्रवाहित तरल की संहति $\Delta m_R = \rho_R A_R v_R \Delta t$ और $\Delta m_Q = \rho_Q A_Q v_Q \Delta t$ होगी। सभी मामलों में तरल के बाहर निकलने की संहति उस स्थान में आने वाले तरल की संहति के बराबर होगी।

अतएव,

$$\rho_P A_P v_P \Delta t = \rho_R A_R v_R \Delta t = \rho_Q A_Q v_Q \Delta t \qquad (9.9)$$

असंपीड्य तरल के प्रवाह के लिए

$$\rho_P = \rho_R = \rho_Q$$

तब समीकरण (9.9)

$$A_P v_P = A_R v_R = A_Q v_Q \qquad (9.10)$$

में बदल जाता है। जिसे **सांतत्य-समीकरण** कहते हैं तथा असंपीड्य तरल प्रभाव में यह संहति संरक्षण का कथन है।

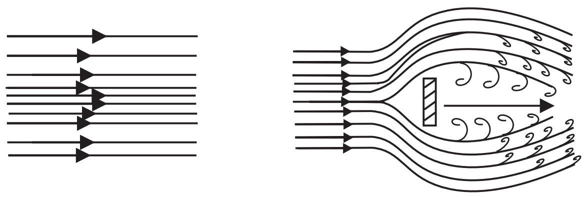
सामान्यतः Av = स्थिरांक (9.11)

Av आयतन अभिवाह या प्रवाह दर देता है। यह नली प्रवाह में सर्वत्र स्थिर रहता है अतः संकरे स्थानों पर जहाँ धारा रेखाएँ पास-पास हैं वहाँ वेग बढ़ जाता है तथा इसका विलोमत: चित्र 9.7b से स्पष्ट है कि $A_R > A_Q$ या $v_R < v_Q$ R से Q को प्रवाहित तरल त्वरित होता है। क्षैतिज पाइप में यह तरल दाब में परिवर्तन से संबद्ध है।

तरल के कम वेग से धारा प्रवाह प्राप्त होता है। एक सीमांत मान के पश्चात जिसे क्रांतिक वेग कहते हैं, यह धारा प्रवाह **प्रक्षुब्द्ध प्रवाह** में बदल जाता है। जब एक तेज़ प्रवाही धारा चट्टान से टकराती है तो हम देख सकते हैं कि कैसे छोटे-छोटे फेन (foam) भँवर जैसे बनते हैं जिन्हें दूध-धारा (white water rapids) कहते हैं।

चित्र 9.8 कुछ प्ररूपी प्रवाह की धारारेखाएँ दर्शायी गई हैं। उदाहरण के लिए चित्र 9.8(a) में स्तरीय प्रवाह दर्शाया

गया है जहाँ तरल के विभिन्न बिंदुओं पर वेगों के परिमाण भिन्न-भिन्न हो सकते हैं, परन्तु उनकी दिशाएँ एक दूसरे से समानांतर हैं। चित्र 9.8 (b) में प्रक्षुब्ध प्रवाह आलेखित किया गया है।



(a) (b)

चित्र 9.8 (a) तरल प्रवाह की कुछ धारारेखाएँ (b) प्रवाह के लंबवत् रखी चपटी प्लेट से टकराता वायु जेट। यह प्रक्षुब्ध प्रवाह का एक उदाहरण है।

9.4 बर्नूली का सिद्धांत

तरल प्रवाह एक जटिल परिघटना है। परन्तु ऊर्जा संरक्षण का उपयोग करते हुए हम अपरिवर्ती अथवा धारा-प्रवाह के कुछ विशिष्ट गुणों को प्राप्त कर सकते हैं।

परिवर्ती अनुप्रस्थ काट के पाइप में तरल प्रवाह पर विचार कीजिए। माना कि पाइप परिवर्ती ऊँचाइयों पर है जैसा कि चित्र 9.9 में दर्शाया गया है। अब माना कि पाइप में एक असंपीड्य तरल अपरिवर्ती प्रवाह से प्रवाहित है। सांतत्य समीकरण के अनुसार इसके वेग में परिवर्तन होना चाहिए। त्वरण उत्पन्न करने के लिए एक बल की आवश्यकता है जो इसे घेरे हुए तरल से उत्पन्न होता है। भिन्न-भिन्न भागों में दाब भिन्न होना चाहिए। पाइप के दो बिंदुओं के बीच दाबांतर का संबंध वेग परिवर्तन (गति ऊर्जा परिवर्तन) तथा उन्नयन (ऊँचाई) में परिवर्तन (स्थिति ऊर्जा में परिवर्तन) दोनों में प्रदर्शित करने वाला सामान्य व्यंजक, बर्नूली का समीकरण है। इस संबंध को स्विस भौतिकविद् डेनियल बर्नूली ने विकसित किया था।

दो क्षेत्रों 1 (अर्थात् BC) तथा 2 (अर्थात् DE) क्षेत्रों में प्रवाह को लें। आरंभ में B तथा D के बीच तरल को लें। अत्यंत अल्प अंतराल Δt में यह तरल प्रवाहित होगा। माना कि B पर चाल v_1 तथा D पर v_2 हैं। तब B पर तरल $v_1\Delta t$, C की ओर प्रवाहित होगा ($v_1\Delta t$ इतना छोटा है कि हम BC का समान अनुप्रस्थ काट ले सकते हैं)। इसी समय अंतराल Δt में तरल जो आरंभ में D पर है E की ओर प्रवाहित होगा तथा $v_2\Delta t$ दूरी तय करेगा। दो क्षेत्रों के बाँधने वाले A_1, A_2 क्षेत्रफल वाले समतल फलकों पर, जैसा दिखाया गया है, दाब P_1, P_2 कार्य करते हैं। बाएँ सिरे (BC) पर तरल पर किया गया कार्य $W_1 = P_1A_1(v_1\Delta t) = P_1\Delta V$ है। क्योंकि दोनों क्षेत्रों से समान आयतन का तरल प्रवाहित होता है (सांतत्य समीकरण से) दूसरे सिरे (DE) पर तरल द्वारा किया गया कार्य $W_2 = P_2A_2(v_2\Delta t) = P_2\Delta V$ है। अथवा तरल पर किया गया कार्य $-P_2\Delta V$ है। अतः द्रव पर किया गया कुल कार्य

$W_1 - W_2 = (P_1 - P_2)\,\Delta V$ है।

इस कार्य का कुछ भाग तरल की गतिज ऊर्जा परिवर्तित करने में चला जाता है, तथा शेष भाग तरल की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा परिवर्तित करने में चला जाता है। यदि पाइप प्रवाहित तरल का घनत्व ρ तथा $\Delta m = \rho A_1 v_1 \Delta t = \rho\Delta V$ की संहति Δt समय में पाइप से प्रवाहित है तो गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन

$$\Delta U = \rho g\Delta V\,(h_2 - h_1)$$

गतिज ऊर्जा में परिवर्तन

$$\Delta K = \left(\frac{1}{2}\right)\rho\,\Delta V\,(v_2^2 - v_1^2)$$

तरल के इस आयतन पर हम कार्य-ऊर्जा प्रमेय (अध्याय 6) का उपयोग कर सकते हैं जिससे हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है।

$$(P_1 - P_2)\,\Delta V = \left(\frac{1}{2}\right)\rho\,\Delta V(v_2^2 - v_1^2) + \rho g\Delta V\,(h_2 - h_1)$$

प्रत्येक पद को ΔV से विभाजित करने पर

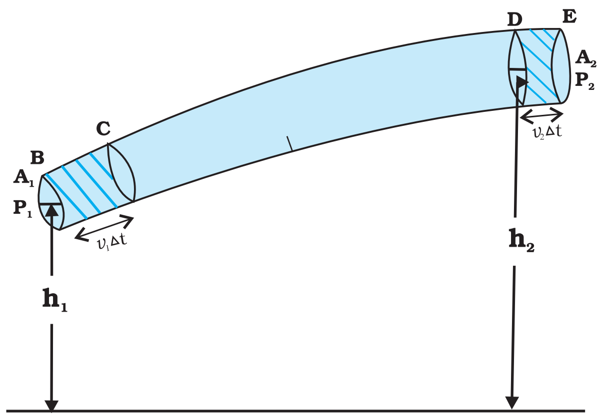
$$(P_1 - P_2) = \left(\frac{1}{2}\right)\rho\,(v_2^2 - v_1^2) + \rho g\,(h_2 - h_1)$$

उपरोक्त पदों को पुनः व्यवस्थित करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$P_1 + \left(\frac{1}{2}\right)\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \left(\frac{1}{2}\right)\rho v_2^2 + \rho g h_2 \quad (9.12)$$

यह **बर्नूली समीकरण** है। चूंकि पाइपलाइन की लंबाई में 1 व 2 किन्हीं दो स्थितियों को दर्शाते हैं अतः हम सामान्य रूप में व्यक्त कर सकते हैं कि

$$P + \left(\frac{1}{2}\right)\rho v^2 + \rho g h = \text{स्थिरांक} \quad (9.13)$$



चित्र 9.9 *परिवर्ती अनुप्रस्थकाट के किसी पाइप में किसी आदर्श तरल का प्रवाह, $v_1 \Delta t$ लंबाई के खंड में भरा तरल समय Δt में $v_2 \Delta t$ लंबाई के खंड तक गति कर लेता है।*

दूसरे शब्दों में, बर्नूली के कथन को हम निम्न प्रकार लिख सकते हैं: "जब हम किसी धारा रेखा के अनुदिश गति करते हैं, तो दाब P प्रति एकांक आयतन गतिज ऊर्जा $\left(\dfrac{\rho v^2}{2}\right)$ तथा प्रति एकांक आयतन गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा (ρgh) का योग अचर रहता है।"

नोट करें कि ऊर्जा संरक्षण के नियम का उपयोग करते समय यह माना गया है कि घर्षण के कारण कोई ऊर्जा क्षति नहीं होती। परन्तु वास्तव में, जब तरल प्रवाह होता है, तो आंतरिक घर्षण के कारण कुछ ऊर्जा की हानि हो जाती है। इसकी व्युत्पत्ति तरल की विभिन्न सतहों के भिन्न-भिन्न वेगों से प्रवाह के कारण होती है। यह सतहें एक दूसरे पर घर्षण बल लगाती हैं और परिणामस्वरूप ऊर्जा का ह्रास होता है। तरलों के इस गुण को श्यानता कहते हैं जिसकी विस्तार से व्याख्या बाद के खंड में की गई है। तरल की क्षय गतिज ऊर्जा ऊष्मा ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है। अतः बर्नूली का समीकरण शून्य श्यानता अथवा असान्य तरलों पर लागू होता है। बर्नूली प्रमेय पर एक और प्रतिबंध है कि यह असंपीड्य तरलों पर ही लागू होता है, क्योंकि तरलों की प्रत्यास्थ ऊर्जा को नहीं लिया गया है। वास्तव में इसके कई उपयोग हैं जो कम श्यानता तथा असंपीड्य तरलों की बहुत सी घटनाओं की व्याख्या कर सकते हैं। अस्थिर अथवा विक्षोभ प्रवाह में भी बर्नूली समीकरण काम नहीं आता क्योंकि इसमें वेग तथा दाब समय में लगातार अस्थिर रहते हैं।

जब तरल विरामावस्था में होता है अर्थात् प्रत्येक स्थान पर इसके कणों का वेग शून्य है, बर्नूली समीकरण निम्न प्रकार हो जाता है:

$$P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2$$
$$(P_1 - P_2) = \rho g (h_2 - h_1)$$

जो समीकरण (9.6) के ही समान है।

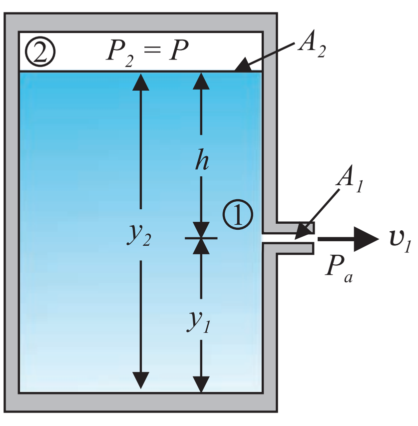
9.4.1 चाल का बहिर्वाह : टोरिसेली का नियम

बहिर्वाह शब्द का अर्थ है तरल का बहिर्गमन। टोरिसेली ने यह पता लगाया कि किसी खुली टंकी से तरल के बहिर्वाह की चाल को मुक्त रूप से गिरते पिण्ड की चाल के सूत्र के समरूप सूत्र द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। ρ घनत्व के द्रव से भरी किसी ऐसी टंकी पर विचार कीजिए जिसमें टंकी की तली से y_1 ऊँचाई पर एक छोटा छिद्र है (देखिए चित्र 9.10)। द्रव के ऊपर, जिसका पृष्ठ y_2 ऊँचाई पर है, वायु है जिसका दाब P है। सांतत्य समीकरण (समीकरण 9.9) से

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

यदि टंकी की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल A_2 छिद्र की अनुप्रस्थ का क्षेत्रफल A_1 की तुलना में काफी अधिक है ($A_2 >> A_1$), तब हम शीर्ष भाग पर तरल को सन्निकटतः विराम में मान सकते हैं, अर्थात् $v_2 = 0$। तब बिंदु 1 तथा 2 पर बर्नूली का समीकरण लागू करते हुए तथा यह लेते हुए कि छिद्र पर दाब P_1 वायुमण्डलीय दाब के बराबर है, अर्थात् $P_1 = P_a$, समीकरण (9.12) से हमें यह संबंध प्राप्त होता है।



चित्र 9.10 *टॉरिसेली नियम। पात्र के पार्श्व से बहिर्वाह की चाल v_1 बर्नूली समीकरण द्वारा प्राप्त होती है। यदि पात्र का शीर्ष भाग खुला है तथा वायुमण्डल के संपर्क में है तब $v_1 = \sqrt{2gh}$*

$$P_a + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P + \rho g y_2$$

$y_2 - y_1 = h$ लेने पर

$$v_1 = \sqrt{2gh + \frac{2(P - P_a)}{\rho}} \qquad (9.14)$$

जब $P >> P_a$ है तथा $2gh$ की उपेक्षा की जा सकती है, तब बहिर्वाह की चाल का निर्धारण पात्र-दाब द्वारा किया जाता है। ऐसी ही स्थिति रॉकेट-नोदन में होती है। इसके विपरीत यदि टंकी का ऊपरी भाग खुला होने के कारण वायुमण्डल के संपर्क में है तो $P = P_a$ तब

$$v_1 = \sqrt{2gh} \qquad (9.15)$$

यह किसी मुक्त रूप से गिरते पिण्ड की चाल है। समीकरण (9.14) **टॉरिसेली के सिद्धांत** को इंगित करता है।

9.4.2 गतिक उत्थापक (लिफ्ट)

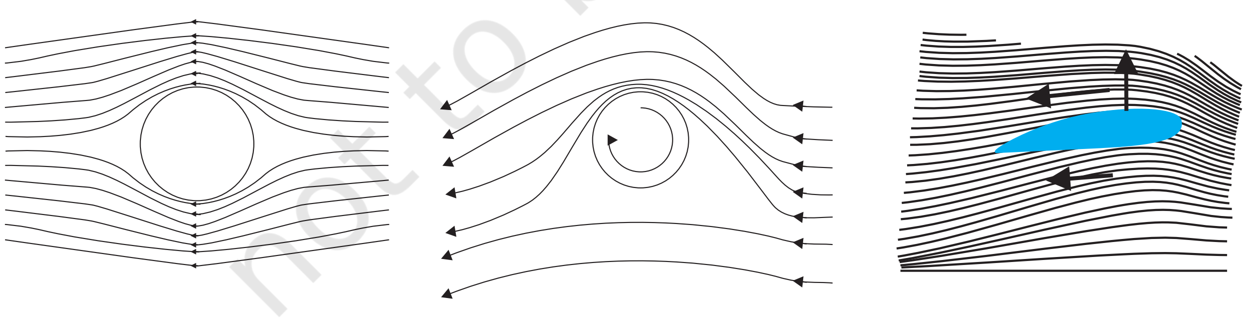
किसी पिण्ड पर गतिक उत्थापक एक बल है। जैसे निम्न के तरल में गति के कारण वायुयान के पंख पर, जलपर्णी या एक घूमती गेंद पर। कई खेल जैसे क्रिकेट, टेनिस, बेसबॉल या गोलक में हम देखते हैं कि वायु में जाती हुई बॉल अपने परवलीय पथ से हट जाती है। इस हटाव को आंशिक रूप से बर्नूली सिद्धांत से समझाया जा सकता है।

(i) **बिना घूमे गेंद का चलना** : तरल के सापेक्ष बिना घूमती गतिमान गेंद के चारों ओर चित्र 9.11(a) में धारारेखाएँ प्रदर्शित हैं। धारारेखाओं की सममिती से यह स्पष्ट है कि तरल में गेंद के ऊपर तथा नीचे संगत बिंदुओं पर उसका वेग समान है, जिससे दाबांतर शून्य होता है। अतः गेंद पर वायु कोई ऊर्ध्वमुखी अथवा अधोमुखी बल नहीं लगाती।

(ii) **घूमती हुई गेंद की चाल** : चक्रण करती हुई गेंद अपने साथ वायु को घसीटती है। यदि फलक खुरदुरा हो तो अधिक वायु घसीटी जाएगी। किसी घूमती हुई गतिमान गेंद की धारारेखाएँ [चित्र 9.11(b)] दर्शायी गई हैं। गेंद आगे की ओर चलती है तथा इसके सापेक्ष वायु पीछे की ओर चलती है। इसलिए, गेंद के ऊपर वायु का वेग बढ़ जाता है और नीचे घट जाता है (खण्ड 9.3 देखें)। धारा रेखायें ऊपर की ओर संघन हो जाती हैं और नीचे की ओर विरल हो जाती हैं।

वेगों में अंतर के कारण ऊपरी तथा निचले पृष्ठों पर दाबांतर उत्पन्न हो जाते हैं जिससे गेंद पर एक नेट ऊर्ध्वमुखी बल कार्य करता है। प्रचक्रण के कारण उत्पन्न इस गतिक उत्थापक को **मेगनस प्रभाव** (Magnus Effect) कहते हैं।

वायुयान के पंख या ऐयरोफॉयल पर उत्थापक : जब ऐयरोफॉयल वायु में क्षैतिज दिशा में चलता है तो चित्र 9.11 (c) में दिखाए अनुसार विशिष्ट आकार के ठोस ऐयरोफॉयल पर गतिक उत्थापक ऊपर की ओर लगता है। चित्र 9.11 (c) के अनुसार वायुयान के पंख की अनुप्रस्थ काट ऐयरोफॉयल जैसी प्रतीत होती है जिसके परितः धारारेखाएँ प्रदर्शित हैं। जब ऐयरोफॉइल हवा के विपरीत चलता है तब पंखों का तरल प्रवाह के सापेक्ष दिक्‌विन्यास धारारेखाओं को पंख के ऊपर-नीचे की अपेक्षा समीप कर देता है। प्रवाह की गति शीर्ष पर अधिक और नीचे कम होती है। इसके कारण ऊर्ध्वमुखी बल से पंख पर गतिक उत्थापक उत्पन्न होता है और यह वायुयान के भार को संतुलित करता है। निम्न उदाहरण इसे दर्शाता है।



(a) (b) (c)

चित्र 9.11 (a) अघूर्णी गतिमान गोले के समीप तरल (b) एक घूमते गतिमान गोले के निकट से गुज़रने वाले तरल का धाराप्रवाह (c) ऐयरोफॉयल के समीप से गुज़रने वाली वायु में धारारेखाएँ।

> **उदाहरण 9.7** किसी पूर्णतः भारित बोइंग विमान की संहति 3.3×10^5 kg है। इसका कुल पंख क्षेत्रफल 500 m^2। यह एक निश्चित ऊँचाई पर 960 km/h की चाल से उड़ रहा है। (a) पंख के ऊपरी तथा निचले पृष्ठों के बीच दाबांतर आकलित कीजिए। (b) निचले पृष्ठ की तुलना में ऊपरी पृष्ठ पर वायु की चाल में आंशिक वृद्धि आकलित कीजिए। [वायु का घनत्व $\rho = 1.2 \text{ kg m}^{-3}$]

हल (a) दाबान्तर से ऊर्ध्वमुखी बल से संतुलित बोइंग विमान का भार है

$$\Delta P \times A = 3.3 \times 10^5 \text{ kg} \times 9.8$$

$$\Delta P = (3.3 \times 10^5 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m s}^{-2}) \;/\; 500 \text{ m}^2$$

$$= 6.5 \times 10^3 \text{ N m}^{-2}$$

(b) समीकरण (9.12) में हम वायुयान के ऊपरी पृष्ठ तथा निचले पृष्ठ की ऊँचाइयों के थोड़े अंतर की उपेक्षा कर देते हैं। तब इनके बीच दाबांतर

$$\Delta P = \frac{\rho}{2}\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right)$$

यहाँ υ_2 वायु की ऊपरी पृष्ठ के ऊपर चाल तथा υ_1 वायु की निचले पृष्ठ के नीचे चाल है।

$$\left(\upsilon_2 - \upsilon_1\right) = \frac{2\Delta P}{\rho\left(\upsilon_2 + \upsilon_1\right)}$$

औसत चाल

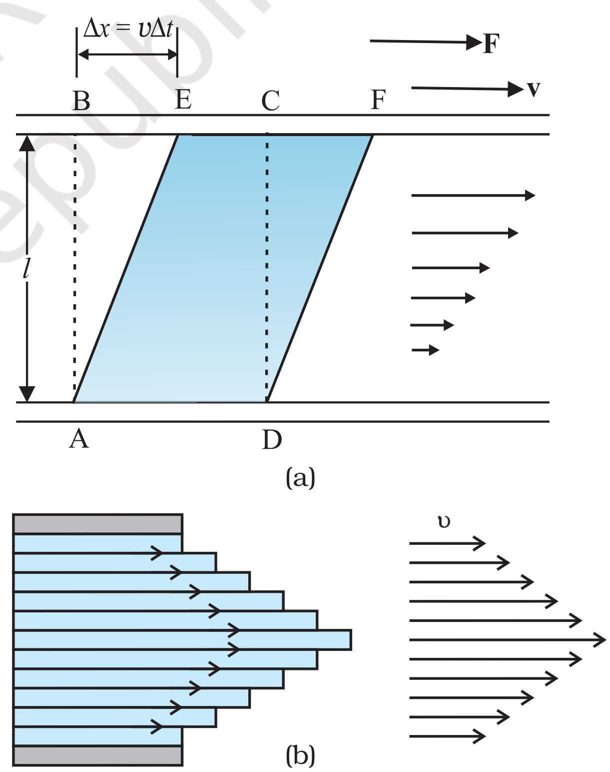
$\upsilon_{av} = (\upsilon_2 + \upsilon_1)/2 = 960 \text{ km/h} = 267 \text{ m s}^{-1}$ लेने पर

$$\left(\upsilon_2 - \upsilon_1\right)/\,\upsilon_{av} = \frac{\Delta P}{\rho \upsilon_{av}^2} \approx 0.08$$

पंखों के ऊपर वायु की चाल पंखों के नीचे वायु की चाल की तुलना में केवल 8 % अधिक होनी चाहिए। ◀

9.5 श्यानता

सभी तरल आदर्श तरल नहीं होते तथा वह गति में कुछ प्रतिरोध डालते हैं। तरल गति में इस प्रतिरोध को आंतरिक घर्षण के रूप में देखा जा सकता है जो ठोसों में पृष्ठ पर गति से उत्पन्न घर्षण जैसा होता है। इसे श्यानता कहते हैं। जब द्रव की सतहों में सापेक्ष गति होती है तब यह बल उपस्थित होता है। चित्र 9.12 (a) में दर्शाये अनुसार यदि काँच की दो प्लेटों के बीच एक द्रव जैसे तेल को लेते हैं, निचली प्लेट को स्थिर रखा जाए जबकि ऊपरी प्लेट को समान गति से निचली प्लेट की अपेक्षा चलाते हैं। यदि तेल को शहद से विस्थापित कर दें तो उसी वेग से प्लेट को चलाने के लिए अधिक बल की आवश्यकता होगी। इससे हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि तेल की तुलना में शहद की श्यानता अधिक है। पृष्ठ के संपर्क में तरल का वेग पृष्ठ के वेग के समान होता है। अतः, द्रव की ऊपरी सतह के संपर्क में द्रव **v** वेग से चलता है और निचली स्थिर सतह के संपर्क में तरल की सतह स्थिर होगी। निचली स्थिर सतह से (शून्य वेग) जैसे-जैसे ऊपर जाते हैं सतहों का वेग समान रूप से बढ़ता जाता है तथा सबसे ऊपरी सतह का वेग **v** होता है। किसी भी द्रव सतह के लिए, इससे ऊपर की सतह इसे आगे की ओर खींचती है जबकि नीचे की सतह पीछे की ओर खींचती है। इसके कारण सतहों के बीच में बल उत्पन्न हो जाता है। इस प्रकार के प्रवाह को परत प्रवाह कहते हैं। जैसे मेज़ पर रखी चपटी किताब पर क्षैतिज बल लगाने पर उसके पन्ने फिसलते हैं इसी प्रकार द्रव की परतें एक दूसरे पर फिसलती हैं। किसी पाइप या ट्यूब में जब एक तरल बहता है तो ट्यूब के अक्ष के अनुदिश द्रव की परत का



चित्र 9.12 *(a) दो समांतर काँच की प्लेटों के बीच रखे द्रव की एक परत जिसमें काँच की निचली प्लेट स्थिर है तथा ऊपरी प्लेट **v** वेग से दाहिनी ओर गतिमान है। (b) पाइप में श्यान प्रवाह के लिए वेग वितरण।*

वेग अधिकतम होता है और शनैः शनैः जैसे हम दीवारों की ओर चलते हैं यह कम होता जाता है और अंत में शून्य हो जाता है [चित्र 9.12 (b)]। एक ट्यूब में बेलनाकार पृष्ठ पर वेग स्थिर रहता है।

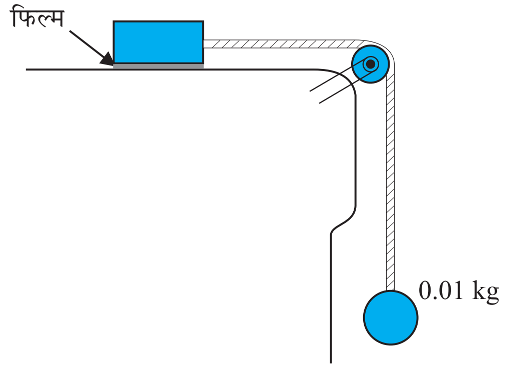
इस गति के कारण द्रव के एक भाग जो किसी समय ABCD के रूप में था कुछ समय अंतराल (Δt) में AEFD का स्वरूप ले लेता है। इस समय अंतराल में द्रव में एक अवरूपण विकृति $\Delta x/l$ उत्पन्न हो जाती है। चूंकि प्रवाहित द्रव में समय के बढ़ने के अनुसार विकृति बढ़ती जाती है। ठोसों के विपरीत प्रयोगों द्वारा पाया गया है कि प्रतिबल विकृति की अपेक्षा 'विकृति परिवर्तन की दर' या 'विकृति दर' अर्थात् $\Delta x/(l\,\Delta t)$ या v/l द्वारा प्रतिबल को प्राप्त किया जाता है। श्यानता गुणांक (उच्चारण 'इटा') की परिभाषा अवरूपण प्रतिबल तथा विकृतिदर के रूप में की जाती है,

$$\eta = \frac{F/A}{v/l} = \frac{Fl}{vA} \tag{9.16}$$

श्यानता का SI मात्र प्वाज (Pl) है। इसके दूसरे मात्रक N s m^{-2} या Pa s हैं। श्यानता की विमाएँ [ML^{-1}T^{-1}] हैं। आमतौर पर पतले द्रवों जैसे पानी, एल्कोहल आदि गाढ़े तरलों जैसे कोलतार, रक्त, ग्लिसरीन आदि की अपेक्षा कम श्यान होते हैं। कुछ सामान्य तरलों के श्यानता गुणांक सारणी 9.2 में सूचीबद्ध हैं। हम रक्त तथा जल के विषय में दो तथ्यों को बताते हैं, जो आपके लिए रोचक हो सकते हैं। सारणी 9.2 में इंगित सूचना के आधार पर जल की तुलना में रक्त अधिक गाढ़ा (अधिक श्यान) है। साथ ही रक्त की आपेक्षिक श्यानता ($\eta/\eta_{\text{जल}}$) ताप–परिसर 0 °C से 37 °C के बीच अचर रहती है।

द्रव की श्यानता ताप बढ़ने पर घटती है, जबकि गैसों की श्यानता ताप बढ़ने पर बढ़ती है।

उदाहरण 9.8 0.10 m^2 क्षेत्रफल की कोई धातु की प्लेट किसी डोरी की सहायता से जो एक आदर्श घिरनी (जिसे संहति रहित, तथा घर्षण रहित माना गया है) के ऊपर से होकर जाती है, 0.010 kg संहति से चित्र 9.15 की भांति जुड़ी है। कोई द्रव जिसकी फिल्म 0.30 mm मोटाई की है, मेज़ तथा प्लेट के बीच रखी हुई है। मुक्त किए जाने पर प्लेट 0.085 m s^{-1} की अचर चाल से दाईं ओर गति करने लगती है। द्रव का श्यानता गुणांक ज्ञात कीजिए।



चित्र 9.13 द्रव के श्यानता गुणांक का मापन।

हल डोरी में तनाव के कारण धातु की प्लेट दाईं ओर गति करती है। डोरी में यह तनाव T परिमाण में डोरी से निलम्बित पिण्ड के भार mg के बराबर है। अतः अवरूपण

$F = T = mg = 0.010 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m s}^{-2} = 9.8 \times 10^{-2}$ N

$$\text{द्रव पर अवरूपण प्रतिबल} = F/A = \frac{9.8\times10^{-2}}{0.10} \text{N.m}^{-2}$$

$$\text{विकृति दर} = \frac{v}{l} = \frac{0.085}{0.30\times10^{-3}}$$

$$\eta = \frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति दर}}$$

$$= \frac{(9.8\times10^{-2}\text{N})(0.30\times10^{-3}\text{m})}{(0.085\text{m s}^{-1})(0.10\text{m}^2)}$$

$= 3.46 \times 10^{-3}$ Pa s ◀

सारणी 9.2 कुछ तरलों की श्यानता

तरल	T(°C)	श्यानता (mPl)
जल	20	1.0
	100	0.3
रक्त	37	2.7
मशीन का तेल	16	113
	38	34
ग्लिसरीन	20	830
शहद		200
वायु	0	0.017
	40	0.019

9.5.1 स्टोक का नियम

सामान्यतः जब एक पिण्ड किसी तरल से गिरता है तो वह अपने संपर्क में तरल की परतों को भी खींचता है। तरल की विभिन्न परतों में आपेक्ष गति उत्पन्न हो जाती है और परिणामस्वरूप पिण्ड एक परिणामी मंदक बल अनुभव करता है। स्वतंत्रतापूर्वक गिरती हुई पानी की बूंदें तथा दोलन गति करता हुआ लोलक ऐसी गति के कुछ सामान्य उदाहरण हैं। यह देखा गया है कि श्यानता बल पिण्ड की गति के अनुपाती तथा उसकी दिशा के विपरीत कार्य करता है। दूसरी अन्य राशियाँ जिस पर बल F निर्भर है तरल की श्यानता η तथा गोल की त्रिज्या a है। एक अंग्रेज़ी वैज्ञानिक सर जॉर्ज जी. स्टोक्स (1819-1903) ने श्यान कर्षण बल F निम्न संबंध द्वारा निरूपित किया है:

$$F = 6\pi\eta a v \tag{9.17}$$

इसे स्टोक का नियम कहते हैं। हम स्टोक के नियम की व्युत्पत्ति नहीं करेंगे।

अवमंदन बल का यह नियम एक रोचक उदाहरण है जो वेग के अनुपाती है। किसी श्यान माध्यम में गिरते पिण्ड का अध्ययन करके हम इसका महत्त्व ज्ञात कर सकते हैं। हम वायु में गिरती एक वर्षा की बूँद पर ध्यान केंद्रित करते हैं। आरंभ में यह गुरुत्व बल के कारण त्वरित होती है। जैसे-जैसे इसका वेग बढ़ता जाता है, मंदक श्यान बल भी बढ़ता जाता है। अंत में जब इस पर कार्यरत श्यान बल तथा उत्प्लावन बल, गुरुत्व बल के तुल्य हो जाता है, तो नेट बल तथा त्वरण शून्य हो जाता है। तब वर्षा की बूँद अचर वेग से नीचे की ओर गिरती है। साम्य अवस्था में **सीमांत वेग** v_t निम्न द्वारा दिया जाता है :

$$6\pi\eta a v_t = (4\pi/3)\, a^3 (\rho-\sigma) g$$

जहाँ ρ तथा σ बूँद तथा तरल के क्रमशः संहति घनत्व हैं। हमें प्राप्त होता है :

$$v_t = 2a^2 (\rho-\sigma) g \,/\, (9\eta) \tag{9.18}$$

अतः सीमांत वेग v_t गोले के आकार के वर्ग के ऊपर निर्भर करता है तथा माध्यम के श्यानता के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

इस संदर्भ में आप उदाहरण 5.2 पर पुनः ध्यान दे सकते हैं।

> **उदाहरण 9.9** 2.0 mm त्रिज्या वाली एक ताँबे की गेंद 20°C पर 6.5 cm s^{-1} सीमांत वेग से तेल के टेंक में गिर रही है। 20°C पर तेल की श्यानता का आकलन कीजिए। तेल का घनत्व 1.5×10^3 kg m^{-3} तथा ताँबे का घनत्व 8.9×10^3 kg m^{-3} है।

हल यहाँ $v_t = 6.5 \times 10^{-2}$ m s^{-1}, $a = 2 \times 10^{-3}$ m, $g = 9.8$ m s^{-2}, $\rho = 8.9 \times 10^3$ kg m^{-3},

$\sigma = 1.5 \times 10^3$ kg m^{-3}। समीकरण (9.20) से

$$\eta = \frac{2}{9} \times \frac{(2\times10^{-3})^2\ \text{m}^2 \times 9.8\ \text{m s}^{-2}}{6.5\times10^{-2}\ \text{m s}^{-1}} \times 7.4\times10^3\ \text{kg m}^{-3}$$

$$= 9.9 \times 10^{-1}\ \text{kg m}^{-1}\ \text{s}^{-1}$$

9.6 पृष्ठ तनाव

आपने देखा होगा कि तेल तथा जल आपस में नहीं मिलते; जल आपको और मुझे गीला कर देता है परन्तु बतख को नहीं; पारा काँच से नहीं चिपकता किन्तु जल चिपक जाता है; गुरुत्व बल की उपस्थिति में भी तेल रुई की बत्ती से ऊपर चढ़ जाता है। रस तथा पानी पेड़ के शीर्ष की पत्तियों तक ऊपर उठ जाता है, रंग के ब्रुश के बाल सूखे होने पर और पानी में डुबोने पर भी एक दूसरे से नहीं चिपकते लेकिन जब उसके बाहर होते हैं तो एक उत्तम नोक बनाते हैं। ये और ऐसे ही अनेक अनुभव द्रवों की स्वतंत्र सतहों से संबंधित हैं। द्रवों की कोई निश्चित आकृति नहीं होती, परन्तु उनका अपना एक निश्चित आयतन होता है। जब उन्हें किसी पात्र में उड़ेलते हैं तो उनका एक स्वतंत्र पृष्ठ होगा। इन पृष्ठों की कुछ अतिरिक्त ऊर्जा होती है। इस परिघटना को पृष्ठ तनाव कहते हैं। यह केवल द्रवों में हो सकती है क्योंकि गैसों के कोई स्वतंत्र पृष्ठ नहीं होते। अब हम इस परिघटना को समझने का प्रयत्न करते हैं।

9.6.1 पृष्ठीय ऊर्जा

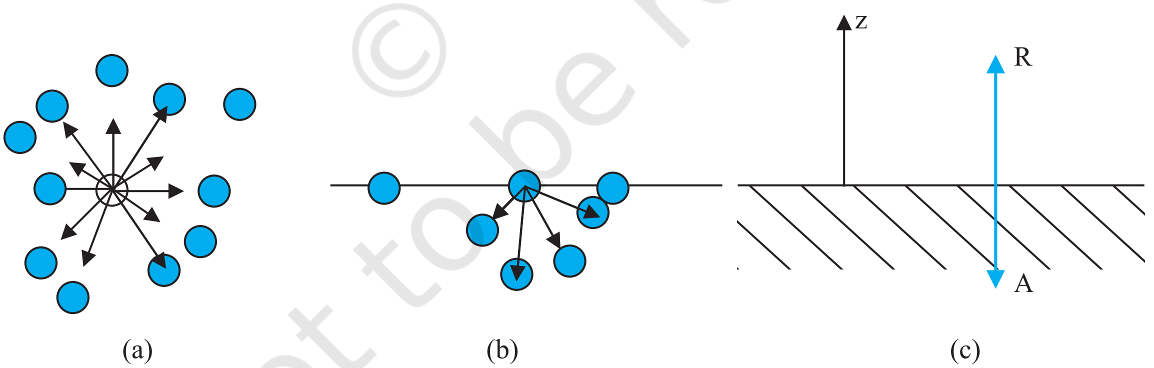
कोई द्रव अपने अणुओं के बीच आकर्षण के कारण स्थायी है। द्रव के भीतर एक अणु लीजिए। अंतरापरमाणुक दूरियाँ इस प्रकार की होती हैं कि यह अपने घेरने वाले सभी परमाणुओं की ओर आकर्षित होता है [चित्र 9.14(a)]। इस आकर्षण के परिणामस्वरूप अणुओं के लिए ऋणात्मक स्थितिज ऊर्जा उत्पन्न होती है। स्थितिज ऊर्जा का परिमाण इस बात पर निर्भर है कि इस चुने हुए अणु के चारों ओर अणु विन्यास किस प्रकार वितरित है तथा उनकी संख्या क्या है। परन्तु सभी अणुओं की औसत स्थितिज ऊर्जा समान होती है। यह इस तथ्य से स्पष्ट है कि इस प्रकार के अणुओं के किसी संचयन (द्रव) को लेने की अपेक्षा उन्हें एक दूसरे से दूर बिखेरने (वाष्पन या वाष्पीकृत करने) के लिए ऊर्जा की आवश्यकता होती है। यह वाष्पन ऊर्जा काफी अधिक होती है। पानी के लिए यह ऊर्जा 40 kJ/mol के आसपास होती है।

अब द्रव के पृष्ठ के समीप किसी अणु पर हम विचार करते हैं [चित्र 9.14(b)]। द्रव के भीतर के अणु की तुलना में द्रव के आधे अणु ही इस अणु को घेरते हैं। इन अणुओं के कारण कुछ ऋणात्मक स्थितिज ऊर्जा होती है। परन्तु स्पष्ट रूप से यह द्रव के भीतर के अणु से अपेक्षाकृत कम होती है अर्थात् जो पूर्णरूप से अंदर है। यह लगभग बाद वाले के अपेक्षा आधी होती है। इस प्रकार किसी द्रव के पृष्ठ के अणु की ऊर्जा द्रव के भीतरी अणुओं की ऊर्जा से कुछ अधिक होती है। अतः कोई द्रव बाह्य स्थितियों के अनुसार, कम से कम अनुमत पृष्ठ क्षेत्रफल करने का प्रयास करता है। पृष्ठ के क्षेत्रफल में वृद्धि करने के लिए ऊर्जा खर्च करनी पड़ती है। अधिकांश पृष्ठीय परिघटनाओं को हम इसी तथ्य के पदों में समझ सकते हैं। किसी अणु को पृष्ठ पर रखने में कितनी ऊर्जा आवश्यक होती है? जैसा कि ऊपर वर्णन किया जा चुका है यह लगभग अणु को पूर्ण रूप से द्रव से बाहर निकालने की ऊर्जा के आधी होती है अर्थात् वाष्पन की ऊष्मा की आधी ऊर्जा चाहिए।

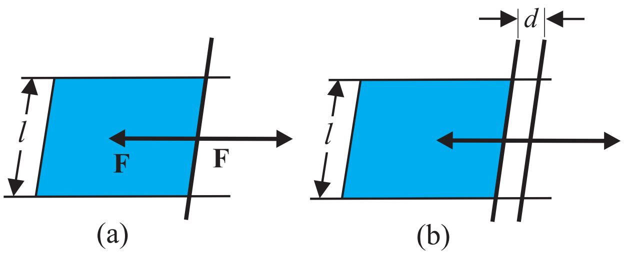
अंत में देखें पृष्ठ क्या है? चूँकि द्रव अनियमित गतिशील अणुओं से बना है अतः पूर्ण रूप से स्पष्ट पृष्ठ नहीं हो सकता। [चित्र 9.14(c)] द्रव अणुओं का घनत्व $z = 0$ पर कुछ ही अणु आकार की दूरी पर तेज़ी से घटकर शून्य हो जाता है।

9.6.2 पृष्ठीय ऊर्जा तथा पृष्ठ तनाव

अन्य सभी कारकों, जैसे आयतन आदि को स्थिर रखते हुए जैसा हमने पहले विचार किया है कि द्रव के पृष्ठ के साथ ऊर्जा संबद्ध होती है और अधिक पृष्ठ उत्पन्न करना चाहें तो हमें और अधिक ऊर्जा खर्च करनी होगी। इस तथ्य को ठीक प्रकार समझने के लिए द्रव की एक ऐसी क्षैतिज फिल्म पर विचार कीजिए जो किसी ऐसी छड़ पर समाप्त होती है जो समांतर निर्देशकों पर सरकने के लिए स्वतंत्र है [चित्र (9.15)]।



चित्र 9.14 किसी द्रव में पृष्ठ पर अणुओं का व्यवस्था आरेख तथा बलों का संतुलन (a) किसी द्रव के भीतर अणु। अणु पर अन्य अणुओं के कारण बलों को दर्शाया गया है। तीरों की दिशाएँ आकर्षण अथवा प्रतिकर्षण को दर्शाती हैं। (b) यही घटनाएँ द्रव के पृष्ठ के लिए। (c) आकर्षी (A) तथा प्रतिकर्षी (R) बलों की संतुलन।



चित्र 9.15 किसी फिल्म को तानना। (a) संतुलन में कोई फिल्म (b) किसी अतिरिक्त दूरी तक तानित फिल्म।

मान लीजिए साम्यावस्था में हम चित्र में दर्शाये अनुसार छड़ को किसी छोटी दूरी d तक हटाते हैं। चूंकि फिल्म का क्षेत्रफल (अथवा पृष्ठ का क्षेत्रफल) बढ़ गया है अत: अब निकाय में अधिक ऊर्जा होगी। इसका अर्थ है कि आंतरिक बल के विपरीत कार्य किया गया है। माना यह आंतरिक बल $\mathbf{F}$ है तो आरोपित बल द्वारा किया गया कार्य $\mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = Fd$ है। ऊर्जा संरक्षण के अनुसार यह अब फिल्म में संचित अतिरिक्त आंतरिक ऊर्जा है। माना कि फिल्म की प्रति एकांक क्षेत्रफल पृष्ठ ऊर्जा S है, और अतिरिक्त क्षेत्रफल $2dl$ है। किसी फिल्म के दो पार्श्व होते हैं जिनके बीच में द्रव होता है अत: फिल्म के दो पृष्ठ होते हैं। अत: अतिरिक्त ऊर्जा

$$S\,(2dl) = Fd \qquad (9.19)$$

अथवा $S = Fd/2dl = F/2l \qquad (9.20)$

राशि S पृष्ठ तनाव का परिमाण है। यह द्रव के प्रति एकांक क्षेत्रफल की पृष्ठीय ऊर्जा है। यह चालित छड़ की प्रति एकांक लंबाई पर तरल द्वारा आरोपित बल है।

अभी तक हमने केवल एक द्रव के पृष्ठ की चर्चा की है। अधिक सामान्य रूप से हमें तरल के द्रवों या ठोस पृष्ठों पर विचार करना चाहिए। इन स्थितियों में पृष्ठीय ऊर्जा पृष्ठ के दोनों ओर के पदार्थों पर निर्भर होती है। उदाहरणस्वरूप यदि पदार्थों के अणु आपस में एक दूसरे को आकर्षित करते हैं तो पृष्ठीय ऊर्जा कम हो जाएगी परन्तु यदि वह एक दूसरे को प्रतिकर्षित करते हैं तो पृष्ठीय ऊर्जा बढ़ जाएगी। इस प्रकार और अधिक उपयुक्त रूप से हम कह सकते हैं कि पृष्ठीय ऊर्जा दोनों पदार्थों के मध्य अंतरापृष्ठ की ऊर्जा है तथा यह दोनों पर ही निर्भर है।

उपरोक्त चर्चा के आधार पर निम्नलिखित प्रेक्षण प्राप्त करते हैं :

(i) पृष्ठ तनाव द्रव तथा अन्य किसी पदार्थ के बीच अंतरापृष्ठ के तल में प्रति एकांक लंबाई पर कार्यरत बल (अथवा प्रति एकांक क्षेत्रफल की पृष्ठीय ऊर्जा) है। यह द्रव के भीतर के अणुओं की तुलना में अंतरापृष्ठ के अणुओं की अतिरिक्त ऊर्जा है।

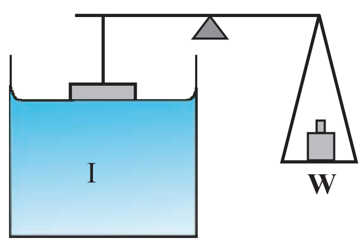
(ii) अंतरापृष्ठ के किसी भी बिंदु पर हम पृष्ठ तल (सीमा के अतिरिक्त) में एक रेखा खींच सकते हैं तथा इस रेखा की प्रति एकांक लंबाई पर रेखा के लंबवत् परिमाण में समान तथा दिशा में विपरीत पृष्ठ तनाव बलों S की कल्पना कर सकते हैं। यह रेखा साम्यावस्था में है और अधिक स्पष्टता के लिए पृष्ठ पर परमाणुओं अथवा अणुओं की एक रेखा की कल्पना कीजिए। इस रेखा के बाईं ओर परमाणु रेखा को अपनी ओर खींचते हैं तथा जो इस रेखा के दाईं ओर हैं वह इसे अपनी ओर खींचते हैं। तनाव की स्थिति में यह परमाणुओं की रेखा साम्यावस्था में होती है। यदि वास्तव में, रेखा अंतरापृष्ठ की सीमांत रेखा को निर्दिष्ट करती है जैसा कि चित्र 9.14 (a) तथा (b) में दर्शाया गया है तो केवल अंदर की ओर प्रति एकांक लंबाई में लगने वाला बल S है।

सारणी 9.3 में विभिन्न द्रवों के लिए पृष्ठ तनाव के मान दिए गए हैं। पृष्ठ तनाव का मान ताप पर निर्भर करता है। श्यानता के समान पृष्ठ तनाव का मान तापवृद्धि के साथ कम होता जाता है।

सारणी 9.3 दिए गए तापों पर कुछ द्रवों के पृष्ठ तनाव तथा वाष्पन ऊष्मा

द्रव	ताप (°C)	पृष्ठ तनाव (N/m)	वाष्पन ऊर्जा (kJ/mol)
हीलियम	-270	0.000239	0.115
ऑक्सीजन	-183	0.0132	7.1
एथानॉल	20	0.0227	40.6
जल	20	0.0727	44.16
पारा	20	0.4355	63.2

यदि ठोस-वायु तथा तरल-वायु पृष्ठीय ऊर्जाओं के योग से तरल तथा ठोस की पृष्ठीय ऊर्जा कम है तो तरल ठोस से चिपकेगा। ठोस तथा द्रव पृष्ठों में आर्कषण बल होता है। चित्र 9.16 में उपकरण के आरेख के अनुसार हम इसे सीधे ही माप सकते हैं। एक चपटी क्षैतिज काँच की प्लेट जिसके नीचे किसी पात्र में द्रव भरा है, तुला की एक भुजा कार्य करती है। प्लेट के क्षैतिज निचले किनारे को पानी से थोड़ा ऊपर रखकर, तुला के दूसरी ओर बाट रखकर संतुलित कर लेते हैं। द्रव से भरे पात्र को थोड़ा ऊपर उठाते हैं ताकि यह काँच की प्लेट के क्षैतिज किनारों को छूने भर लगे और पृष्ठ तनाव के कारण प्लेट को नीचे की ओर खींचने लगे। अब दूसरी ओर कुछ बाट रखते हैं जब तक कि प्लेट द्रव से कुछ अलग न हो जाए।



चित्र 9.16 पृष्ठ तनाव मापना।

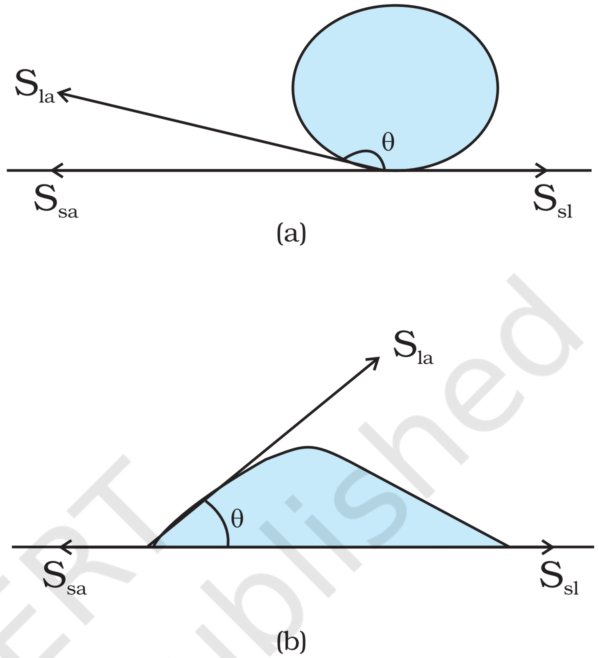
मान लीजिए आवश्यक अतिरिक्त भार W है। तब समीकरण 9.20 तथा वहाँ की गई चर्चा से, द्रव-वायु अंतरापृष्ठ का पृष्ठ तनाव

$$S_{la} = (W/2l) = (mg/2l) \qquad (9.21)$$

जहाँ m अतिरिक्त संहति तथा l काँच की प्लेट के निचले किनारे की लंबाई है, पादाक्षर (la) इस तथ्य को स्पष्ट करता है कि यहाँ द्रव-वायु अंतरापृष्ठ तनाव सम्मिलित है।

9.6.3 संपर्क कोण

किसी अन्य माध्यम के संपर्क तल के निकट द्रव का पृष्ठ, आमतौर पर वक्रीय होता है। संपर्क बिंदु पर द्रव पृष्ठ पर स्पर्शज्या तथा द्रव के अंदर ठोस पृष्ठ पर स्पर्शज्या के बीच कोण को संपर्क कोण कहते हैं। इसे θ से प्रदर्शित करते हैं। द्रवों तथा ठोसों के विभिन्न युग्मों के अंतरापृष्ठों पर यह भिन्न-भिन्न होता है। संपर्क कोण का मान यह दर्शाता है कि कोई द्रव किसी ठोस के पृष्ठ पर फैलेगा अथवा इस पर बूंदें बनाएगा। उदाहरणस्वरूप जैसा चित्र 9.17 (a) में दर्शाया गया है, कमल के पत्ते पर पानी की बूंदें बनती हैं परन्तु स्वच्छ प्लास्टिक प्लेट पर यह फैल जाती है [चित्र 9.17(b)]।



चित्र 9.17 अंतरापृष्ठों में तनाव के साथ पानी की बूँदों के विभिन्न आकार (a) कमल के एक पत्ते पर (b) एक स्वच्छ प्लास्टिक प्लेट पर।

अब हम तीन अंतरापृष्ठीय तनावों का तीन अंतरापृष्ठों पर विचार करते हैं। जैसा कि चित्र 9.17(a) तथा (b) में दर्शाया गया है कि हम द्रव-वायु, ठोस-वायु तथा ठोस-द्रव के पृष्ठ तनाव S_{la}, S_{sa}, S_{sl} से दर्शाते हैं। तीनों माध्यमों के पृष्ठों पर लगे बल संपर्क रेखा पर साम्यावस्था में होने चाहिए। चित्र 9.17 (b) से हम निम्न संबंध व्युत्पन्न कर सकते हैं

$$S_{la} \cos\theta + S_{sl} = S_{sa} \qquad (9.22)$$

यदि $S_{sl} > S_{la}$ तो संपर्क कोण बृहद कोण होगा जैसा कि पानी तथा पत्ते का अंतरापृष्ठ। जब θ बृहद कोण है तो द्रव के अणु एक दूसरे की ओर मजबूती से आकर्षित होते हैं तथा ठोस के अणुओं के साथ दुर्बल रूप से। द्रव-ठोस अंतरापृष्ठ को बनाने में बहुत ऊर्जा व्यय होती है, और तब द्रव ठोस को नहीं भिगोता। ऐसा मोम या तेल लगे पृष्ठ पर पानी के साथ होता है

एवं पारे के साथ किसी भी तल पर। दूसरी ओर, यदि द्रव के अणु ठोस के अणुओं की ओर अधिक शक्ति से आकर्षित होते हैं, तो यह S_{sl} को कम कर देगा। इसलिए, cos θ बढ़ सकता है या θ कम हो सकता है। तब θ न्यूनकोण होगा, ऐसा पानी के काँच या प्लास्टिक पर होने से होता है या मिट्टी के तेल का किसी भी वस्तु पर (यह केवल फैल जाता है)। साबुन, अपमार्जक तथा रँगने वाली वस्तुएँ, गीले कर्मक हैं। जब इन्हें मिलाया जाता है तो संपर्क कोण छोटा हो जाता है जिससे यह भलीभांति अंदर घुसकर प्रभावी हो जाते हैं। पानी तथा रेशों के बीच संपर्क कोण बड़ा करने के लिए पानी में जल सहकारक को मिलाया जाता है।

9.6.4 बूँद तथा बुलबुले

पृष्ठ तनाव का एक महत्त्व यह भी है कि यदि गुरुत्व बल के प्रभाव की उपेक्षा की जा सके तो द्रव की मुक्त बूँदें तथा बुलबुले गोलाकार होते हैं। आपने इस तथ्य को अवश्य देखा होगा: विशेषकर स्पष्ट रूप से उच्च वेग वाले स्प्रे अथवा जेट से द्रुत बनने वाली छोटी बूँदों में, अथवा अपने बचपन के समय बनाए साबुन के बुलबुलों में। बूँदें तथा बुलबुले गोल ही क्यों होते हैं? साबुन के बुलबुले किस कारण स्थायी हैं? जैसा कि हम बार-बार चर्चा कर रहे हैं कि किसी द्रव-वायु अंतरापृष्ठ में ऊर्जा होती है। अत: किसी दिए गए आयतन के लिए सर्वाधिक स्थायी पृष्ठ वही है जिसका पृष्ठ क्षेत्रफल सबसे कम हो। गोले में यह गुण होता है। हम इस तथ्य को इस पुस्तक में सत्यापित नहीं कर सकते परन्तु आप स्वयं यह जाँच कर सकते हैं कि इस संदर्भ में गोला कम से कम एक घन की तुलना में बेहतर है। अत: यदि गुरुत्व बल तथा अन्य बल (उदाहरणार्थ वायु-प्रतिरोध) निष्प्रभावी हों तो द्रव की बूँदें गोल होती हैं।

पृष्ठ तनाव का एक अन्य रोचक परिणाम यह है कि बूँद के भीतर का दाब बूँद के बाहर के दाब से अधिक होता है। [चित्र 9.18(a)]। मान लीजिए r त्रिज्या की कोई गोल बूँद साम्यावस्था में है। यदि इस बूँद की त्रिज्या में Δr की वृद्धि की जाए, तो बूँद में अतिरिक्त ऊर्जा होगी,

$$[4\pi(r + \Delta r)^2 - 4\pi r^2]\, S_{la} = 8\pi r\, \Delta r\, S_{la} \qquad (9.23)$$

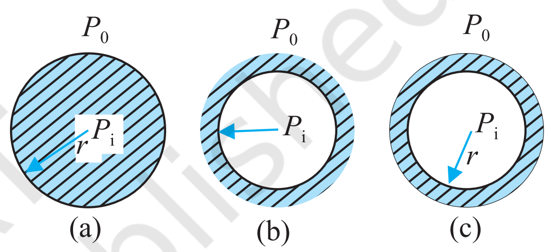
यदि बूँद साम्यावस्था में है तो खर्च की गई यह ऊर्जा बूँद के भीतर तथा बाहर के दाबांतर $(P_i - P_o)$ के प्रभाव में प्रसार के कारण बूँद द्वारा प्राप्त की गई ऊर्जा से संतुलित होती है। यहाँ कृत कार्य

$$W = (P_i - P_o)\, 4\pi r^2 \Delta r \qquad (9.24)$$

जिससे

$$(P_i - P_o) = (2\, S_{la} / r) \qquad (9.25)$$

व्यापक रूप में, किसी द्रव-गैस अंतरापृष्ठ के लिए, उत्तल पार्श्व की ओर दाब का मान अवतल पार्श्व की ओर के दाब के मान से अधिक होता है। उदाहरण के लिए, यदि किसी द्रव के भीतर कोई वायु का बुलबुला है, तो यह वायु का बुलबुला अधिक दाब पर होगा [चित्र 9.18 (b)]।



चित्र 9.18 r त्रिज्या की बूँद, गुहिका तथा बुलबुला।

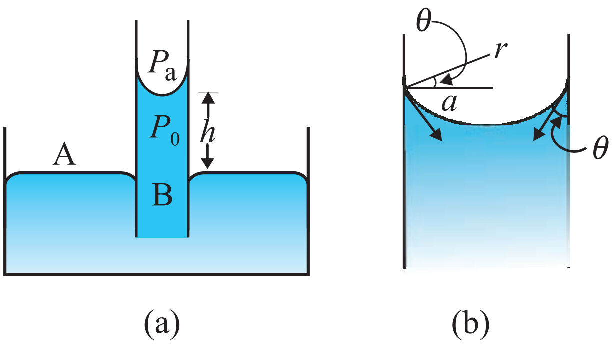
किसी बुलबुले [चित्र 9.18 (c)] की बनावट किसी बूँद अथवा किसी गुहिका से भिन्न होती है। बुलबुले में दो अंतरापृष्ठ होते हैं। उपरोक्त तर्क के आधार पर किसी बुलबुले के लिए

$$(P_i - P_o) = (4\, S_{la} / r) \qquad (9.26)$$

कदाचित् इसी कारण साबुन का बुलबुला बनाने के लिए आपको कुछ तेज़ी से फूँकना पड़ता है, परन्तु बहुत अधिक नहीं। अंदर थोड़ा अधिक दाब आवश्यक है।

9.6.5 केशिकीय उन्नयन

एक सुप्रसिद्ध प्रभाव किसी पतली नली में गुरुत्व के विरुद्ध जल का ऊपर उठना (उन्नयन) किसी वक्रित द्रव-वायु अंतरापृष्ठ के दोनों ओर दाब में अंतर होने के परिणामस्वरूप है। लैटिन भाषा में शब्द Capilla का अर्थ है केश अर्थात् बाल। यदि कोई नली केश की भाँति पतली हो तो उस नली में उन्नयन बहुत अधिक होगा। इसी तथ्य को देखने के लिए किसी ऐसी वृत्ताकार



चित्र 9.19 *केशिकीय उन्नयन (a) जल से भरे खुले बर्तन में डूबी किसी पतली नली का व्यवस्था आरेख। (b) अंतरापृष्ठ के निकट का आवर्धित आरेख।*

अनुप्रस्थ काट (त्रिज्या a) की ऊर्ध्वाधर केशनली पर विचार करते हैं जिसका एक सिरा जल से भरे किसी खुले बर्तन में डूबा है (चित्र 9.19) । पानी तथा काँच में संपर्क कोण न्यून होता है। इस प्रकार केशिका में पानी का पृष्ठ अवतल होता है। इसका अर्थ है कि शीर्ष पृष्ठ के दोनों ओर दाबांतर है।

$$(P_i - P_o) = (2S/r) = 2S/(a \sec \theta)$$

$$= (2S/a) \cos \theta \qquad (9.27)$$

इस प्रकार, ***नली के भीतर नवचंद्रक (वायु-जल अंतरापृष्ठ) पर जल का दाब वायुमण्डलीय दाब से कम है। चित्र 9.19(a) में दो बिंदुओं A तथा B पर ध्यान केंद्रित कीजिए, इन दोनों पर समान दाब होना चाहिए, अर्थात्***

$$P_o + h\rho g = P_i = P_A \qquad (9.28)$$

जहाँ ρ जल का घनत्व तथा h को केशिकीय उन्नयन कहते हैं [चित्र 9.19(a)]। समीकरण (9.27) तथा (9.28) का उपयोग करके हम प्राप्त करते हैं

$$h\rho g = (P_i - P_o) = (2S \cos\theta)/a \qquad (9.29)$$

यहाँ की गई इस विवेचना तथा समीकरण (9.24) एवं (9.25) से यह स्पष्ट हो जाता है कि केशिकीय उन्नयन का कारण पृष्ठ तनाव ही है। a के लघुमानों के लिए यह अधिक होगा। बारीक या अत्यधिक पतली केशिका में प्रतिरूपी तौर से यह कुछ cm की कोटि का होता है। उदाहरण के लिए यदि a = 0.05 cm है तो पानी के पृष्ठ तनाव (सारणी 9.3) का उपयोग करके हम पाते हैं

$$h = 2S/(\rho g a)$$

$$= \frac{2 \times (0.073 \text{ N m}^{-1})}{(10^3 \text{kg m}^{-3})(9.8 \text{ m s}^{-2})(5 \times 10^{-4} \text{m})}$$

$$= 2.98 \times 10^{-2} \text{ m} = 2.98 \text{ cm}$$

ध्यान दीजिए, यदि द्रव-नवचंद्रक (मेनिस्कस) उत्तल है जैसा कि पारे में होता है अर्थात् $\cos\theta$ ऋणात्मक है तो समीकरण (9.28) से यह स्पष्ट है कि केशनली में द्रव का तल नीचे गिर जाता है अर्थात् केशिकीय अपनयन होता है।

उदाहरण 9.10 2.00 mm व्यास की किसी केशनली का निचला सिरा बीकर में भरे जल के पृष्ठ से 8.00 cm नीचे तक डुबोया जाता है। नली के जल में डूबे सिरे पर अर्धगोलीय बुलबुला फुलाने के लिए नली के भीतर आवश्यक दाब ज्ञात कीजिए। प्रयोग के ताप पर जल का पृष्ठ तनाव 7.30×10^{-2} Nm^{-1} है। जल का घनत्व = 1000 kg/m³, वायुमण्डलीय दाब = 1.01×10^5 Pa तथा g = 9.80 m s^{-2}। दाब आधिक्य भी परिकलित कीजिए।

हल किसी तरल के भीतर गैस के बुलबुले के अंदर दाब आधिक्य = $2S/r$, यहाँ S द्रव-गैस अंतरापृष्ठ का पृष्ठतनाव तथा r बुलबुले की त्रिज्या है। यहाँ ध्यान दीजिए, इसमें केवल एक ही द्रव पृष्ठ है। (किसी गैस में द्रव की बूँद के लिए दो द्रव अंतरापृष्ठ होते हैं, अत: उस प्रकरण में दाब आधिक्य = $4S/r$ लागू होता है)। बुलबुले के बाहर दाब P_o = वायुमण्डलीय दाब + 8 cm जल स्तंभ का दाब। अर्थात्

$$P_o = (1.01 \times 10^5 \text{ Pa} + 0.08 \text{ m} \times 1000 \text{ kg m}^{-3} \times 9.80 \text{ m s}^{-2})$$

$$= 1.01784 \times 10^5 \text{ Pa}$$

अत: बुलबुले के भीतर दाब

$$P_i = P_o + 2S/r$$

$$= 1.01784 \times 10^5 \text{ Pa} + (2 \times 7.3 \times 10^{-2} \text{ Pa m}/10^{-3} \text{ m})$$

$$= (1.01784 + 0.00146) \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$= 1.02 \times 10^5 \text{ Pa}$$

चूँकि बुलबुला अर्धगोलीय है, अत: यहाँ केशनली की त्रिज्या को ही बुलबुले की त्रिज्या माना गया है। (उत्तर का निकटन तीन सार्थक अंकों तक किया गया है।) बुलबुले के भीतर दाब आधिक्य 146 Pa है।

सारांश

1. तरलों का मूलभूत गुण यह है कि वह प्रवाहित होते (बहते) हैं। अपनी आकृति में परिवर्तन के प्रति तरलों में कोई प्रतिरोध नहीं होता। अतः पात्र की आकृति तरल की आकृति को निर्धारित करती है।
2. द्रव असंपीड्य होता है तथा इसका अपना स्वतंत्र पृष्ठ होता है। गैस संपीड्य होती है तथा यह फैलकर समस्त उपलब्ध आयतन (स्थान) को भर देती है।
3. यदि किसी तरल द्वारा किसी क्षेत्रफल A पर आरोपित अभिलंब बल F है तो औसत दाब P_{av} को बल तथा क्षेत्रफल के अनुपात के रूप में इस प्रकार परिभाषित किया जाता है :

   $$P_{av} = \frac{F}{A}$$
4. दाब का मात्रक पास्कल (Pa) है। यह वास्तव में $N\ m^{-2}$ ही है। दाब के अन्य सामान्य मात्रक इस प्रकार हैं :

   1 atm = 1.01×10^5 Pa

   1 bar = 10^5 Pa

   1 torr = 133 Pa = 0.133 kPa

   1 mm of Hg = 1 torr = 133 Pa
5. *पास्कल का नियम :* इसके अनुसार विरामावस्था में तरल का दाब उन सभी बिंदुओं पर जो समान ऊँचाई पर स्थित हैं, समान होता है। किसी परिबद्ध तरल पर आरोपित दाब बिना घटे उस तरल के सभी बिंदुओं तथा पात्र की दीवारों पर संचरित हो जाता है।
6. किसी तरल के भीतर दाब गहराई h के साथ इस व्यंजक के अनुसार परिवर्तित होता है

   $$P = P_a + \rho g h$$

   यहाँ ρ तरल का घनत्व है जिसे एकसमान माना गया है।
7. किसी असमान अनुप्रस्थ काट वाले पाइप में अपरिवर्ती प्रवाहरत, असंपीड्य तरल के प्रत्येक बिंदु से एक सेकंड में प्रवाहित होने वाले आयतन का परिमाण समान रहता है।

   $v A$ = नियतांक (v वेग तथा A अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल)

   असंपीड्य तरलों के बहाव में यह समीकरण संहति संरक्षण के नियम के कारण है।
8. *बर्नूली का सिद्धांत :* इस सिद्धांत के अनुसार जब हम किसी धारा रेखा के अनुदिश गमन करते हैं, तो दाब (P), प्रति एकांक आयतन गतिज ऊर्जा ($\rho v^2/2$), तथा प्रति एकांक आयतन स्थितिज ऊर्जा ($\rho g y$) का योग अचर रहता है

   $P + \rho v^2/2 + \rho g y$ = नियतांक

   यह समीकरण, मूलतः अपरिवर्ती प्रवाहरत, शून्य श्यानता वाले तरल के लिए लागू होने वाला ऊर्जा संरक्षण नियम है। शून्य श्यानता का कोई द्रव नहीं होता अतः उपरोक्त कथन लगभग सत्य है। श्यानता घर्षण की भांति होती है और वह गतिज ऊर्जा को ऊष्मा ऊर्जा में बदल देती है।
9. यद्यपि तरल में अपरूपण विकृति के लिए अपरूपक प्रतिबल की आवश्यकता नहीं होती, परन्तु जब किसी तरल पर अपरूपण प्रतिबल लगाया जाता है तो उसमें गति आ जाती है, जिसके कारण इसमें एक अपरूपण विकृति उत्पन्न हो जाती है जो समय के बढ़ने के साथ बढ़ती है। अपरूपण प्रतिबल एवं अपरूपण विकृति की समय दर के अनुपात को श्यानता गुणांक η कहते हैं।

यहाँ प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं जो पाठ्य सामग्री में दिए गए हैं।

10. *स्टोक का नियम :* इस नियम के अनुसार a त्रिज्या का गोला, जो श्यानता η के तरल में, $\mathbf{v}$ वेग से गतिमान है, द्रव की श्यानता के कारण एक श्यान कर्षण बल $\mathbf{F}$ अनुभव करता है जो $\mathbf{F} = 6\pi\eta a\mathbf{v}$ द्वारा व्यक्त किया जा सकता है।

11. किसी द्रव का पृष्ठ तनाव प्रति एकांक लंबाई पर आरोपित बल (अथवा प्रति एकांक क्षेत्रफल की पृष्ठीय ऊर्जा होता है), जो द्रव तथा सीमांत पृष्ठ के बीच अंतरापृष्ठ के तल में कार्य करता है। यह वह अतिरिक्त ऊर्जा है जो द्रव के अभ्यंतर (आंतरिक) के अणुओं की अपेक्षा इसके अंतरापृष्ठ के अणुओं में होती है।

विचारणीय विषय

1. दाब एक *अदिश राशि* है। दाब की परिभाषा "प्रति एकांक क्षेत्रफल पर आरोपित बल" से हमारे मन में ऐसी धारणा बनती है कि दाब सदिश राशि है जो कि वास्तव में असत्य है। परिभाषा के अंश में जिस 'बल' का प्रयोग किया गया है वह वास्तव में बल का एक घटक है जो पृष्ठ के क्षेत्रफल पर अभिलंबवत् आरोपित होता है। तरलों का वर्णन करते समय कण तथा दृढ़ पिण्ड यांत्रिकी की तुलना में संकल्पनात्मक बदलाव की आवश्यकता होती है। यहाँ हमारी रुचि तरल के उन-उन धर्मों में है जो तरल के एक बिंदु से दूसरे बिंदु में परिवर्तित हो जाते हैं।
2. हमें यह कदापि नहीं सोचना चाहिए कि तरल केवल ठोसों, जैसे किसी पात्र की दीवारें अथवा तरल में डूबा ठोस पदार्थ, पर ही दाब डालते हैं। वास्तव में तरल में हर बिंदु पर दाब होता है। तरल का कोई अवयव (जैसा कि चित्र 9.2 (a)] में दर्शाया गया है, उसके विभिन्न फलकों पर सामान्य दाब आरोपित होने के कारण साम्यावस्था में होता है।
3. दाब के लिए व्यंजक

   $P = P_a + \rho g h$

   तभी सत्य होता है, जब तरल असंपीड्य हो। व्यावहारिक रूप से कहें तो यह द्रवों पर जो अधिकतर असंपीड्य हैं, लागू होता है और इसीलिए एक नियत ऊँचाई के लिए अपरिवर्तनीय रहता है।
4. गेज़ दाब (या प्रमापी दाब) वास्तविक दाब तथा वायुमण्डलीय दाब का अंतर होता है।

   $P - P_a = P_g$

   बहुत सी दाब मापक युक्तियाँ गेज़ दाब ही मापती हैं। इनमें टायरों के दाब गेज़ तथा रक्तचाप गेज़ (स्फाइग्मौमैनोमीटर) सम्मिलित हैं।
5. धारारेखा किसी तरल प्रवाह का मानचित्र होती है। स्थायी प्रवाह में दो धारारेखाएँ एक दूसरे को नहीं काटतीं। यदि ऐसा होता, तो जिस बिंदु पर दो धारारेखाएँ एक दूसरे को काटती हैं वहाँ तरल कण के दो संभव वेग होते।
6. जिन तरलों में श्यान कर्षण होता है उन पर बर्नूली-सिद्धांत लागू नहीं होता। इस प्रकरण में क्षयकारी श्यान बल द्वारा किया गया कार्य भी गणना में लेना चाहिए तथा P_2 [चित्र 9.9] का मान समीकरण (9.12) में दिए गए मान से कम होगा।
7. ताप बढ़ने पर द्रव के परमाणु और अधिक गतिशील हो जाते हैं तथा श्यानता गुणांक η का मान घट जाता है। किसी गैस में ताप बढ़ने पर उसके परमाणुओं की यादृच्छिक गति बढ़ जाती है और η भी बढ़ जाता है।
8. पृष्ठ पर अणुओं की स्थितिज ऊर्जा अभ्यंतर के अणुओं की स्थितिज ऊर्जा की अपेक्षा अधिक होने के कारण पृष्ठ तनाव होता है। दो पदार्थों जिनमें कम से कम एक तरल है, के अंतरापृष्ठ पर (जो दोनों को पृथक करता है) पृष्ठ ऊर्जा होती है। यह केवल एक तरल का ही गुण नहीं है।

भौतिक राशि	प्रतीक	विमाएँ	मात्रक	टिप्पणी
दाब	P	$[M\,L^{-1}T^{-2}]$	पास्कल (Pa)	1 atm = 1.013×10^5 Pa, अदिश
घनत्व	ρ	$[M\,L^{-3}]$	kg m^{-3}	अदिश
आपेक्षिक घनत्व		–	–	$\frac{\rho_{\text{पदार्थ}}}{\rho_{\text{जल}}}$, अदिश
श्यानता गुणांक	η	$[M\,L^{-1}\,T^{-1}]$	Pa s or पोयसुले (Pl)	अदिश
पृष्ठ तनाव	S	$[M\,T^{-2}]$	N m^{-1}	अदिश

अभ्यास

9.1 स्पष्ट कीजिए क्यों
- (a) मस्तिष्क की अपेक्षा मानव का पैरों पर रक्त चाप अधिक होता है।
- (b) 6 km ऊँचाई पर वायुमण्डलीय दाब समुद्र तल पर वायुमण्डलीय दाब का लगभग आधा हो जाता है, यद्यपि वायुमण्डल का विस्तार 100 km से भी अधिक ऊँचाई तक है।
- (c) यद्यपि दाब, प्रति एकांक क्षेत्रफल पर लगने वाला बल होता है तथापि द्रवस्थैतिक दाब एक अदिश राशि है।

9.2 स्पष्ट कीजिए क्यों
- (a) पारे का काँच के साथ स्पर्श कोण अधिक कोण होता है जबकि जल का काँच के साथ स्पर्श कोण न्यून कोण होता है।
- (b) काँच के स्वच्छ समतल पृष्ठ पर जल फैलने का प्रयास करता है जबकि पारा उसी पृष्ठ पर बूँदें बनाने का प्रयास करता है। (दूसरे शब्दों में जल काँच को गीला कर देता है जबकि पारा ऐसा नहीं करता है।)
- (c) किसी द्रव का पृष्ठ तनाव पृष्ठ के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता है।
- (d) जल में घुले अपमार्जकों के स्पर्श कोणों का मान कम होना चाहिए।
- (e) यदि किसी बाह्य बल का प्रभाव न हो, तो द्रव बूँद की आकृति सदैव गोलाकार होती है।

9.3 प्रत्येक प्रकथन के साथ संलग्न सूची में से उपयुक्त शब्द छाँटकर उस प्रकथन के रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए:
- (a) व्यापक रूप में द्रवों का पृष्ठ तनाव ताप बढ़ने पर.......... है। (बढ़ता/घटता)
- (b) गैसों की श्यानता ताप बढ़ने पर .... है, जबकि द्रवों की श्यानता ताप बढ़ने पर .... है। (बढ़ती/घटती)
- (c) दृढ़ता प्रत्यास्थता गुणांक वाले ठोसों के लिए अपरूपण प्रतिबल............., के अनुक्रमानुपाती होता है, जबकि द्रवों के लिए वह .... के अनुक्रमानुपाती होता है। (अपरूपण विकृति/अपरूपण विकृति की दर)
- (d) किसी तरल के अपरिवर्ती प्रवाह में आए किसी संकीर्णन पर प्रवाह की चाल में वृद्धि में .... का अनुसरण होता है। (संहति का संरक्षण/बर्नूली सिद्धांत)
- (e) किसी वायु सुरंग में किसी वायुयान के मॉडल में प्रक्षोभ की चाल वास्तविक वायुयान के प्रक्षोभ के लिए क्रांतिक चाल की तुलना में......... होती है। (अधिक/कम)

9.4 निम्नलिखित के कारण स्पष्ट कीजिए :
- (a) किसी कागज़ की पट्टी को क्षैतिज रखने के लिए आपको उस कागज़ पर ऊपर की ओर हवा फूँकनी चाहिए, नीचे की ओर नहीं।

(b) जब हम किसी जल टोंटी को अपनी उँगलियों द्वारा बंद करने का प्रयास करते हैं, तो उँगलियों के बीच की खाली जगह से तीव्र जल धाराएँ फूट निकलती हैं।

(c) इंजक्शन लगाते समय डॉक्टर के अँगूठे द्वारा आरोपित दाब की अपेक्षा सुई का आकार दवाई की बहि:प्रवाही धारा को अधिक अच्छा नियंत्रित करता है।

(d) किसी पात्र के बारीक छिद्र से निकलने वाला तरल उस पर पीछे की ओर प्रणोद आरोपित करता है।

(e) कोई प्रचक्रमान क्रिकेट की गेंद वायु में परवलीय प्रपथ का अनुसरण नहीं करती।

9.5 ऊँची एड़ी के जूते पहने 50 kg संहति की कोई बालिका अपने शरीर को 1.0 cm व्यास की एक ही वृत्ताकार एड़ी पर संतुलित किए हुए है। क्षैतिज फर्श पर एड़ी द्वारा आरोपित दाब ज्ञात कीजिए।

9.6 टॉरिसिली के वायुदाब मापी में पारे का उपयोग किया गया था। पास्कल ने ऐसा ही वायुदाब मापी 984 kg m^{-3} घनत्व की फ्रेंच शराब का उपयोग करके बनाया। सामान्य वायुमंडलीय दाब के लिए शराब-स्तंभ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

9.7 समुद्र तट से दूर कोई ऊर्ध्वाधर संरचना 10^9 Pa के अधिकतम प्रतिबल को सहन करने के लिए बनाई गई है। क्या यह संरचना किसी महासागर के भीतर किसी तेल कूप के शिखर पर रखे जाने के लिए उपयुक्त है? महासागर की गहराई लगभग 3 km है। समुद्री धाराओं की उपेक्षा कीजिए।

9.8 किसी द्रवचालित आटोमोबाइल लिफ्ट की संरचना अधिकतम 3000 kg संहति की कारों को उठाने के लिए की गई है। बोझ को उठाने वाले पिस्टन की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 425 cm^2 है। छोटे पिस्टन को कितना अधिकतम दाब सहन करना होगा?

9.9 किसी U-नली की दोनों भुजाओं में भरे जल तथा मेथेलेटिड स्पिरिट को पारा एक-दूसरे से पृथक् करता है। जब जल तथा पारे के स्तंभ क्रमश: 10 cm तथा 12.5 cm ऊँचे हैं, तो दोनों भुजाओं में पारे का स्तर समान है। स्पिरिट का आपेक्षिक घनत्व ज्ञात कीजिए।

9.10 यदि प्रश्न 9.9 की समस्या में, U-नली की दोनों भुजाओं में इन्हीं दोनों द्रवों को और उड़ेल कर दोनों द्रवों के स्तंभों की ऊँचाई 15 cm और बढ़ा दी जाएँ, तो दोनों भुजाओं में पारे के स्तरों में क्या अंतर होगा। (पारे का आपेक्षिक घनत्व = 13.6)।

9.11 क्या बर्नूली समीकरण का उपयोग किसी नदी की किसी क्षिप्रिका के जल-प्रवाह का विवरण देने के लिए किया जा सकता है? स्पष्ट कीजिए।

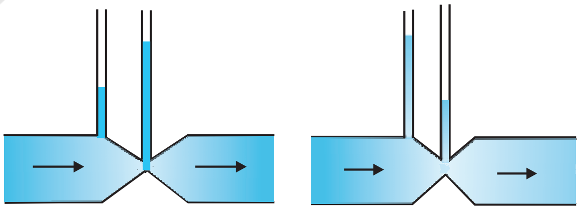
9.12 बर्नूली समीकरण के अनुप्रयोग में यदि निरपेक्ष दाब के स्थान पर प्रमापी दाब (गेज़ दाब) का प्रयोग करें तो क्या इससे कोई अंतर पड़ेगा? स्पष्ट कीजिए।

9.13 किसी 1.5 m लंबी 1.0 cm त्रिज्या की क्षैतिज नली से ग्लिसरीन का अपरिवर्ती प्रवाह हो रहा है। यदि नली के एक सिरे पर प्रति सेकंड एकत्र होने वाली ग्लिसरीन का परिमाण 4.0×10^{-3} kg s^{-1} है, तो नली के दोनों सिरों के बीच दाबांतर ज्ञात कीजिए। (ग्लिसरीन का घनत्व = 1.3×10^3 kg m^{-3} तथा ग्लिसरीन की श्यानता = 0.83 Pa s)

[आप यह भी जाँच करना चाहेंगे कि क्या इस नली में स्तरीय प्रवाह की परिकल्पना सही है।]

9.14 किसी आदर्श वायुयान के परीक्षण प्रयोग में वायु-सुरंग के भीतर पंखों के ऊपर और नीचे के पृष्ठों पर वायु-प्रवाह की गतियाँ क्रमश: 70 m s^{-1} तथा 63 m s^{-1} हैं। यदि पंख का क्षेत्रफल 2.5 m^2 है, तो उस पर आरोपित उत्थापक बल परिकलित कीजिए। वायु का घनत्व 1.3 kg m^{-3} लीजिए।

9.15 चित्र 9.20(a) तथा (b) किसी द्रव (श्यानताहीन) का अपरिवर्ती प्रवाह दर्शाते हैं। इन दोनों चित्रों में से कौन सही नहीं है? कारण स्पष्ट कीजिए।



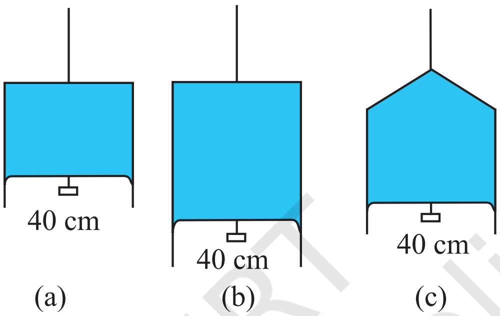
(a) (b)

चित्र 9.20

9.16 किसी स्प्रे पंप की बेलनाकार नली की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल $8.0\ cm^2$ है । इस नली के एक सिरे पर 1.0 mm व्यास के 40 सूक्ष्म छिद्र हैं। यदि इस नली के भीतर द्रव के प्रवाहित होने की दर $1.5\ m\ min^{-1}$ है, तो छिद्रों से होकर जाने वाले द्रव की निष्कासन-चाल ज्ञात कीजिए ।

9.17 U-आकार के किसी तार को साबुन के विलयन में डुबो कर बाहर निकाला गया जिससे उस पर एक पतली साबुन की फिल्म बन गई । इस तार के दूसरे सिरे पर फिल्म के संपर्क में एक फिसलने वाला हलका तार लगा है जो 1.5×10^{-2} N भार (जिसमें इसका अपना भार भी सम्मिलित है) को सँभालता है । फिसलने वाले तार की लंबाई 30 cm है । साबुन की फिल्म का पृष्ठ तनाव कितना है ?

9.18 निम्नांकित चित्र 9.21(a) में किसी पतली द्रव-फिल्म को 4.5×10^{-2} N का छोटा भार सँभाले दर्शाया गया है । चित्र (b) तथा (c) में बनी इसी द्रव की फिल्में इसी ताप पर कितना भार सँभाल सकती हैं ? अपने उत्तर को प्राकृतिक नियमों के अनुसार स्पष्ट कीजिए ।



चित्र 9.21

9.19 3.00 mm त्रिज्या की किसी पारे की बूँद के भीतर कमरे के ताप पर दाब क्या है? 20 °C ताप पर पारे का पृष्ठ तनाव $4.65 \times 10^{-1}\ N\ m^{-1}$ है । यदि वायुमंडलीय दाब 1.01×10^5 Pa है, तो पारे की बूँद के भीतर दाब-अधिक्य भी ज्ञात कीजिए ।

9.20 5.00 mm त्रिज्या के किसी साबुन के विलयन के बुलबुले के भीतर दाब-आधिक्य क्या है? 20 °C ताप पर साबुन के विलयन का पृष्ठ तनाव $2.50 \times 10^{-2}\ N\ m^{-1}$ है । यदि इसी विमा का कोई वायु का बुलबुला 1.20 आपेक्षिक घनत्व के साबुन के विलयन से भरे किसी पात्र में 40.0 cm गहराई पर बनता, तो इस बुलबुले के भीतर क्या दाब होता, ज्ञात कीजिए। (1 वायुमंडलीय दाब = 1.01×10^5 Pa) ।

अध्याय 10

11089CH11

द्रव्य के तापीय गुण

10.1 भूमिका
10.2 ताप तथा ऊष्मा
10.3 ताप मापन
10.4 आदर्श गैस समीकरण तथा परम ताप
10.5 तापीय प्रसार
10.6 विशिष्ट ऊष्मा धारिता
10.7 ऊष्मामिति
10.8 अवस्था परिवर्तन
10.9 ऊष्मा स्थानांतरण
10.10 न्यूटन का शीतलन नियम

सारांश
विचारणीय विषय
अभ्यास

10.1 भूमिका

हम सभी में ताप तथा ऊष्मा की सहज बोध धारणा होती है। ताप किसी वस्तु की तप्तता (ऊष्णता) की माप होती है। उबलते जल से भरी केतली बर्फ से भरे बॉक्स से अधिक तप्त होती है। भौतिकी में हमें ऊष्मा, ताप, आदि धारणाओं को अधिक सावधानीपूर्वक परिभाषित करने की आवश्यकता होती है। इस अध्याय में आप यह जानेंगे कि ऊष्मा क्या है और इसे कैसे मापते हैं, तथा एक वस्तु से दूसरी वस्तु में ऊष्मा प्रवाह की विभिन्न प्रक्रियाओं का अध्ययन करेंगे। अध्ययन करते आप यह भी ज्ञात करेंगे कि किसी घोड़ागाड़ी के लकड़ी के पहिए की नेमि पर लोहे की रिंग चढ़ाने से पहले लोहार इसे तप्त क्यों करते हैं, तथा सूर्य छिपने के पश्चात् समुद्र तटों पर पवन प्राय: अपनी दिशा उत्क्रमित क्यों कर लेती हैं? आप यह भी जानेंगे कि क्या होता है जब जल उबलता अथवा जमता है तथा इन प्रक्रियाओं की अवधि में इसके ताप में परिवर्तन नहीं होता, यद्यपि काफी मात्रा में ऊष्मा इनके भीतर/इनसे बाहर प्रवाहित होती है।

10.2 ताप तथा ऊष्मा

हम द्रव्य के तापीय गुणों के अध्ययन का आरंभ ताप तथा ऊष्मा की परिभाषा से कर सकते हैं। ताप तप्तता अथवा शीतलता की आपेक्षिक माप अथवा सूचन होता है। किसी तप्त बर्तन के ताप को उच्च ताप तथा बर्फ के घन के ताप को निम्न ताप कहते हैं। एक पिण्ड जिसका ताप दूसरे पिण्ड की अपेक्षा अधिक है, अपेक्षाकृत अधिक तप्त कहा जाता है। ध्यान दीजिए, कि लंबे और ठिगने की भांति तप्त तथा शीत भी आपेक्षिक पद हैं। हम स्पर्श द्वारा ताप का अनुभव कर सकते हैं। परन्तु यह ताप बोध कुछ-कुछ अविश्वसनीय होता है तथा इसका परिसर इतना सीमित है कि किसी वैज्ञानिक कार्यों के लिए इसका कोई उपयोग नहीं किया जा सकता।

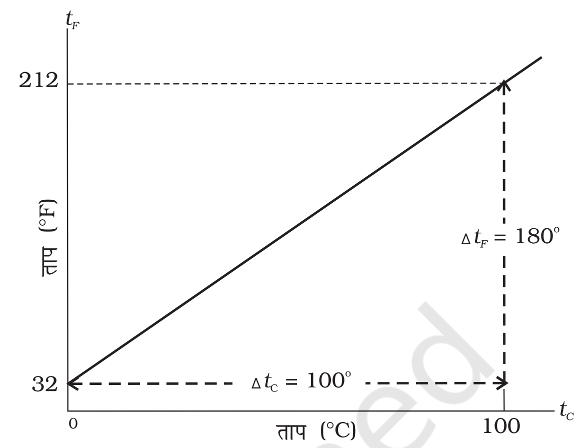
अपने अनुभवों से हम यह जानते हैं कि किसी तप्त गर्मी के दिन एक मेज पर रखा बर्फ के शीतल जल से भरा गिलास अंततोगत्वा गर्म हो जाता है जबकि तप्त चाय से भरा प्याला उसी मेज पर ठंडा हो जाता है। इसका अर्थ यह हुआ कि जब भी किसी वस्तु (निकाय), इस प्रकरण में बर्फ का शीतल जल अथवा

गर्म चाय, तथा उसके परिवेशी माध्यम के तापों में अंतर होगा तो वस्तु तथा उसके परिवेशी माध्यम के बीच उस समय तक ऊष्मा स्थानांतरण होता है जब तक वस्तु तथा इसका परिवेशी माध्यम समान ताप पर नहीं आ जाते। हम यह भी जानते हैं कि गिलास में भरे शीतल जल के प्रकरण में ऊष्मा पर्यावरण से गिलास में प्रवाहित होती है, जबकि गर्म चाय के प्रकरण में ऊष्मा गर्म चाय के प्याले से पर्यावरण में प्रवाहित होती है। अत: हम यह कह सकते हैं कि **ऊष्मा ऊर्जा का एक रूप है जिसका स्थानांतरण दो (अथवा अधिक) निकायों के बीच अथवा किसी निकाय तथा उसके परिवेश के बीच ताप में अंतर के कारण होता है।** स्थानांतरित ऊष्मा ऊर्जा के SI मात्रक को जूल (J) में व्यक्त किया जाता है जबकि ताप का SI मात्रक केल्विन (K) है तथा °C सामान्य उपयोग में आने वाला ताप का मात्रक है। जब किसी वस्तु को गर्म करते हैं तो उसमें बहुत से परिवर्तन हो सकते हैं। इसके ताप में वृद्धि हो सकती है, इसमें प्रसार हो सकता है अथवा अवस्था परिवर्तन हो सकता है। अनुवर्ती अनुभागों में हम विभिन्न वस्तुओं पर ऊष्मा के प्रभाव का अध्ययन करेंगे।

10.3 ताप मापन

तापमापी (थर्मामीटर) का उपयोग करके ताप की एक माप प्राप्त होती है। पदार्थों के बहुत से भौतिक गुणों में ताप के साथ पर्याप्त परिवर्तन होते हैं। ऐसे कुछ गुणों को तापमापी की रचना का आधार मानकर उपयोग किया जाता है। सामान्य उपयोग में आने वाला गुण "ताप के साथ किसी द्रव के आयतन में परिवर्तन" होता है। उदाहरण के लिए, सामान्य काँच-में-द्रव प्रकार के तापमापियों में पारा, ऐल्कोहॉल आदि का उपयोग किया जाता है, जिनका एक बड़े परिसर में आयतन तापीय प्रसार रेखीय होता है। जिससे आप परिचित हैं। पारा तथा एल्कोहॉल ऐसे द्रव हैं जिनका उपयोग अधिकांश काँच-में-द्रव तापमापियों में किया जाता है।

तापमापियों का अंशांकन इस प्रकार किया जाता है कि किसी दिए गए ताप को कोई संख्यात्मक मान किसी उपयुक्त मापक्रम पर निर्धारित किया जा सके। किसी भी मानक मापक्रम के लिए दो नियत संदर्भ बिंदुओं की आवश्यकता होती है। चूंकि ताप के साथ सभी पदार्थों की विमाएँ परिवर्तित होती हैं अत: प्रसार के लिए कोई निरपेक्ष संदर्भ उपलब्ध नहीं है। तथापि आवश्यक नियत बिंदु को सदैव समान ताप पर होने वाली भौतिक परिघटनाओं से संबंधित किया जा सकता है। जल का हिमांक तथा भाप-बिंदु दो सुविधाजनक नियत बिंदु हैं, जिन्हें हिमांक तथा क्वथनांक कहते हैं। ये दो नियत बिंदु वह ताप हैं जिन पर शुद्ध जल मानक दाब के अधीन जमता तथा उबलता है। फारेनहाइट ताप मापक्रम तथा सेल्सियस ताप मापक्रम, दो सुपरिचित ताप मापक्रम हैं। फारेनहाइट मापक्रम पर हिमांक तथा भाप-बिंदु के मान क्रमश: 32°F तथा 212°F हैं जबकि सेल्सियस मापक्रम पर इनके मान क्रमश: 0°C तथा 100°C हैं। फारेनहाइट मापक्रम पर दो संदर्भ बिंदुओं के बीच 180 समान अंतराल हैं तथा सेल्सियस मापक्रम पर ये अंतराल 100 हैं।



चित्र 10.1 फारेनहाइट ताप (t_F) प्रति सेल्सियस ताप (t_c) का आलेखन।

दो मापक्रमों में रूपांतरण के लिए आवश्यक संबंध को फारेनहाइट ताप (t_F) तथा सेल्सियस ताप (t_C) के बीच ग्राफ से प्राप्त किया जा सकता है। यह एक सरल रेखा (चित्र 10.1) है जिसका समीकरण इस प्रकार है :

$$\frac{t_F - 32}{180} = \frac{t_C}{100} \tag{10.1}$$

10.4 आदर्श-गैस समीकरण तथा परम ताप

काँच-में-द्रव तापमापी, प्रसार गुणों में अंतर के कारण नियत बिंदुओं से अन्य तापों के भिन्न पाठ्यांक दर्शाते हैं। परन्तु ऐसे तापमापी जिनमें गैस का उपयोग होता है, चाहे उनमें किसी भी गैस का उपयोग किया जाए, सदैव एक ही पाठ्यांक प्रदर्शित करते हैं। प्रयोग यह दर्शाते हैं कि सभी गैसें कम घनत्व होने पर समान प्रसार-आचरण दर्शाती हैं। वे चर राशियाँ, जो किसी दी गई मात्रा (द्रव्यमान) की गैस के आचरण की व्याख्या करते हैं, दाब, आयतन तथा ताप (P, V, तथा T) (यहाँ $T = t + 273.15$; t सेल्सियस मापक्रम °C में ताप है)। जब ताप को नियत रखा जाता है, तो किसी गैस की निश्चित मात्रा का दाब तथा आयतन PV = नियतांक के रूप में संबंधित होते हैं। इस संबंध को, एक अंग्रेज रसायनज्ञ रॉबर्ट बॉयल (1627-1691) जिन्होंने इस संबंध की खोज की थी, के नाम पर बॉयल-नियम कहते हैं। जब दाब को नियत रखते हैं, तो किसी निश्चित परिमाण की गैस का आयतन उसके ताप से इस प्रकार संबंधित है :

V/T = नियतांक। यह संबंध फ्रेंच वैज्ञानिक जैक्स चार्ल्स (1747–1823) के नाम पर चार्ल्स के नियम से जाना जाता है। कम घनत्व पर गैसें इन नियमों का पालन करती हैं जिन्हें एकल संबंध में समायोजित किया जा सकता है। ध्यान दीजिये कि चूंकि गैस की दी हुई मात्रा के लिए PV = नियतांक तथा V/T = नियतांक, इसलिए PV/T भी एक नियतांक होना चाहिए। इस संबंध को आदर्श गैस नियम कहते हैं। इसे और अधिक व्यापक रूप में लिखा जा सकता है जिसका अनुप्रयोग केवल किसी एकल गैस की दी गई मात्रा पर ही नहीं होता, वरन् किसी भी कम घनत्व की गैस की किसी मात्रा के लिए किया जा सकता है। इस संबंध को **आदर्श गैस समीकरण** कहते हैं।

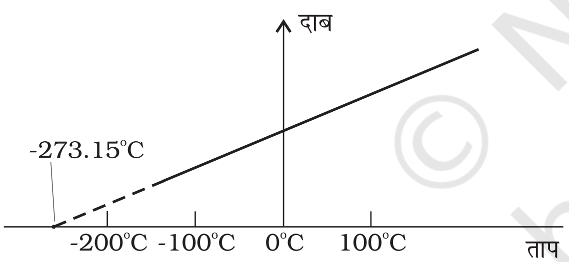
$$\frac{PV}{T} = \mu R$$

अथवा $PV = \mu RT$ (10.2)

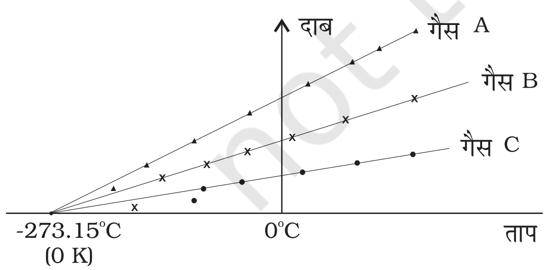
यहाँ, μ गैस के प्रतिदर्श में मोल की संख्या है तथा R को सार्वत्रिक गैस नियतांक कहते हैं :

$R = 8.31\ \mathrm{J\ mol^{-1}\ K^{-1}}$

समीकरण 10.2 से हमने जाना है कि दाब तथा आयतन (का गुणनफल) ताप के अनुक्रमानुपाती है : $PV \propto T$। यह संबंध किसी नियत आयतन गैस तापमापी में ताप मापन के लिए गैस के उपयोग को स्वीकार करते हैं। किसी गैस का आयतन नियत रखने पर, $P \propto T$ प्राप्त होता है। इस प्रकार, किसी नियत आयतन गैस तापमापी में ताप को दाब के पदों में मापा जाता है।



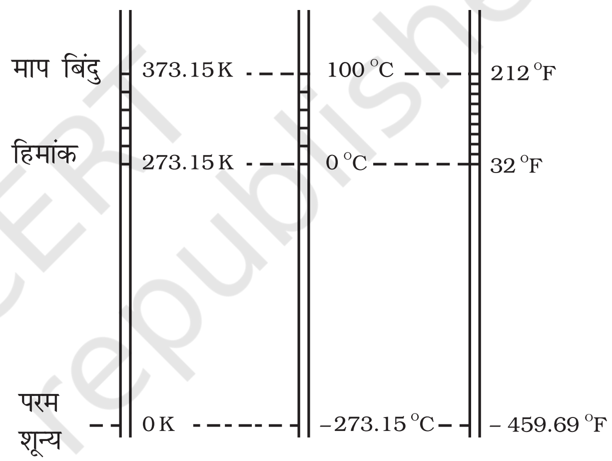
चित्र 10.2 नियत आयतन पर रखी किसी कम घनत्व की गैस के दाब तथा आयतन के बीच ग्राफ।



चित्र 10.3 दाब तथा ताप के बीच ग्राफ का आलेखन तथा कम घनत्व की गैसों के लिए रेखाओं का बहिर्वेशन समान परम शून्य ताप को संकेत करता है।

चित्र 10.2 में दर्शाए अनुसार, इस प्रकरण में, दाब तथा ताप के बीच ग्राफ एक सरल रेखा होता है।

तथापि, निम्न ताप पर वास्तविक गैसों पर ली गई मापों तथा आदर्श गैस नियम द्वारा प्रागुक्त मानों में अंतर पाया गया है। परन्तु एक विस्तृत ताप परिसर में यह संबंध रैखिक है तथा ऐसा प्रतीत होता है कि यदि गैस गैसीय अवस्था में ही बनी रहे तो ताप घटाने पर दाब शून्य हो जाएगा। चित्र 10.3 में दर्शाए अनुसार, सरल रेखा को बहिर्वेशित करके किसी आदर्श गैस के लिए परम निम्निष्ठ ताप प्राप्त किया जा सकता है। इस ताप का मान – 273.15°C पाया गया तथा इसे **परम शून्य** कहा जाता है। परम शून्य ब्रिटिश वैज्ञानिक लॉर्ड केल्विन के नाम पर केल्विन ताप मापक्रम अथवा परम ताप मापक्रम का आधार है। इस मापक्रम पर – 273.15°C को शून्य बिंदु के रूप में, अर्थात् 0 K लिया जाता है (चित्र 10.4)।



चित्र 10.4 केल्विन, सेल्सियस तथा फारेनहाइट ताप मापक्रमों में तुलना।

केल्विन तथा सेल्सियस मापक्रमों के लिए मात्रक की आमाप अंश समान होते हैं, अत: इन मापक्रमों के तापों में संबंध इस प्रकार है :

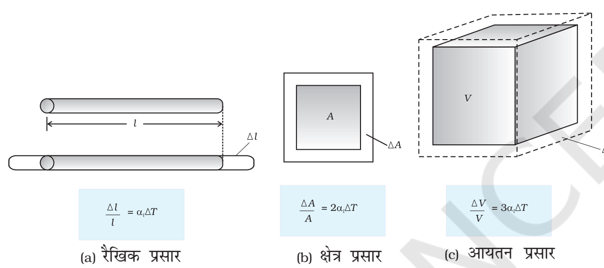
$$T = t_C + 273.15 \qquad (10.3)$$

10.5 तापीय प्रसार

आपने यह देखा होगा कि कभी–कभी धातुओं के ढक्कन वाली बंद बोतलों के चूड़ीदार ढक्कनों को इतना कसकर बंद कर दिया जाता है कि ढक्कनों को खोलने के लिए उन्हें कुछ देर तक गर्म जल में डालना होता है। ऐसा करने पर ढक्कन में प्रसार होकर वह ढीला हो जाता है और उसकी चूड़ियाँ आसानी से खुल जाती हैं। द्रवों के प्रकरण में आपने यह देखा होगा कि जब किसी तापमापी

को हलके उष्ण जल में रखते हैं, तो उस तापमापी में पारा कुछ ऊपर चढ़ जाता है। यदि हम तापमापी को उष्ण जल से बाहर निकाल लेते हैं तो तापमापी में पारे का तल नीचे गिर जाता है। इसी प्रकार, गैसों के प्रकरण में, ठंडे कमरे में आंशिक रूप से फूला कोई गुब्बारा, उष्ण जल में रखे जाने पर अपनी पूरी आमाप तक फूल सकता है। इसके विपरीत, जब किसी पूर्णत: फूले किसी गुब्बारे को शीतल जल में डुबाते हैं तो वह भीतर की वायु के सिकुड़ने के कारण सिकुड़ना आरंभ कर देता है।

यह हमारा सामान्य अनुभव है कि अधिकांश पदार्थ तप्त होने पर प्रसारित होते हैं तथा शीतलन पर सिकुड़ते हैं। किसी वस्तु के ताप में परिवर्तन होने पर उसकी विमाओं में अंतर हो जाता है। किसी वस्तु के ताप में वृद्धि होने पर उसकी विमाओं में वृद्धि होने को तापीय प्रसार कहते हैं। लंबाई में प्रसार को **रैखिक प्रसार** कहते हैं। क्षेत्रफल में प्रसार को **क्षेत्र प्रसार** कहते हैं। आयतन में प्रसार को **आयतन प्रसार** कहते हैं (चित्र 10.5)।



चित्र 10.5 तापीय प्रसार।

यदि पदार्थ किसी लंबी छड़ के रूप में है, तो ताप में अल्प परिवर्तन, ΔT, के लिए लंबाई में भिन्नात्मक परिवर्तन, $\Delta l/l$, ΔT के अनुक्रमानुपाती होता है।

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha_l \, \Delta T \qquad (10.4)$$

जहाँ α_l को **रैखिक प्रसार गुणांक (अथवा रैखिक प्रसारता)** कहते हैं तथा यह छड़ के पदार्थ का अभिलक्षण होता है। सारणी 10.1 में ताप परिसर 0 °C से 100 °C में कुछ पदार्थों के रैखिक प्रसार गुणांकों के प्रतिरूपी माध्य मान दिए गए हैं। इस सारणी से काँच तथा ताँबे के लिए α_l के मानों की तुलना कीजिए। हम यह पाते हैं कि समान ताप वृद्धि के लिए ताँबे में काँच की तुलना में पाँच गुना अधिक प्रसार होता है। सामान्यत:, धातुओं में अधिक प्रसार होता है तथा इनके लिए α_l के मान अपेक्षाकृत अधिक होते हैं।

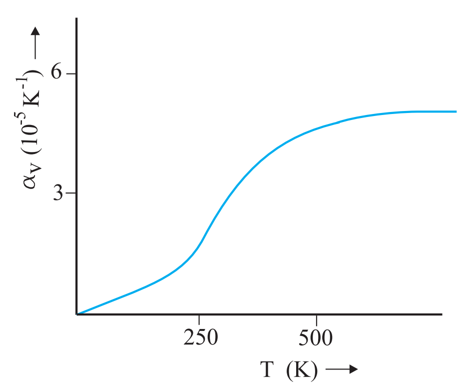
सारणी 10.1 कुछ पदार्थों के लिए रैखिक प्रसार गुणांकों के मान

पदार्थ	α_l (10^{-5} K^{-1})
एलुमिनियम	2.5
पीतल	1.8
लोहा	1.2
ताँबा	1.7
चाँदी	1.9
सोना	1.4
काँच (पायरेक्स)	0.32
लैड	0.29

इसी प्रकार, हम किसी ताप परिवर्तन, ΔT के लिए किसी पदार्थ के भिन्नात्मक आयतन परिवर्तन, $\frac{\Delta V}{V}$, पर विचार करते हैं तथा **आयतन प्रसार गुणांक (अथवा आयतन प्रसारता),** α_V को इस प्रकार परिभाषित करते हैं

$$\alpha_V = \left(\frac{\Delta V}{V}\right)\frac{1}{\Delta T} \qquad (10.5)$$

यहाँ भी α_V पदार्थ का अभिलक्षण है, परन्तु सही अर्थ में यह नियतांक नहीं है। व्यापक रूप में यह ताप पर निर्भर करता है (चित्र 10.6)। यह पाया गया है कि केवल उच्च ताप पर α_V नियतांक बन जाता है।



चित्र 10.6 ताप के फलन के रूप में ताँबे का आयतन प्रसार गुणांक।

सारणी 10.2 में 0-100 °C ताप परिसर में कुछ सामान्य पदार्थों के आयतन प्रसार गुणांकों के मान दिए गए हैं। आप यह देख सकते हैं कि इन पदार्थों (ठोस तथा द्रव) के तापीय प्रसार कम हैं, तथा पायरेक्स काँच तथा इनवार (लोहे तथा निकेल की

विशिष्ट मिश्र धातु) जैसे पदार्थों के α_v के मान विशेषकर निम्न हैं। इस सारणी से हम यह पाते हैं कि एल्कोहॉल (ऐथिल) के लिए α_v का मान पारे की तुलना में अधिक है, तथा समान ताप वृद्धि के लिए इसमें पारे की तुलना में अधिक वृद्धि होती है।

सारणी 10.2 कुछ पदार्थों के आयतन प्रसार गुणांक के मान

पदार्थ	α_v (K^{-1})
एलुमिनियम	7×10^{-5}
पीतल	6×10^{-5}
लोहा	3.55×10^{-5}
पैराफीन	58.8×10^{-5}
काँच (सामान्य)	2.5×10^{-5}
काँच (पायरेक्स)	1×10^{-5}
कठोर रबड़	2.4×10^{-4}
इनवार	2×10^{-6}
पारा	18.2×10^{-5}
जल	20.7×10^{-5}
एल्कोहॉल (इथैनॉल)	110×10^{-5}

जल असंगत व्यवहार प्रदर्शित करता है; यह 0°C से 4°C के बीच गर्म किए जाने पर सिकुड़ता है। किसी दिए गए परिमाण के जल का आयतन, कक्ष ताप से 4°C तक ठंडा किए जाने पर, घटता है [चित्र 10.7(a)]। 4°C से कम ताप पर आयतन बढ़ता है अत: घनत्व घटता है [चित्र 10.7(b)]।

इसका अर्थ यह हुआ कि जल का घनत्व 4°C पर अधिकतम होता है। जल के इस गुण का एक महत्त्वपूर्ण पर्यावरणीय प्रभाव है : तालाबों तथा झीलों जैसे जलाशयों का शीर्ष भाग पहले जमता है। जैसे-जैसे झील 4°C तक ठंडी होती जाती है, पृष्ठ के समीप का जल अपनी ऊर्जा वातावरण को देता जाता है और संघनित होकर डूबता जाता है। तली का उष्ण, अपेक्षाकृत कम संघनित जल ऊपर उठता है। परन्तु, एक बार शीर्षभाग के ठंडे जल का ताप 4°C से नीचे पहुँच जाता है, यह जल कम संघनित बन जाता है, और पृष्ठ पर ही रहता है, जहाँ यह जम जाता है। यदि जल में यह गुण न होता, तो झील तथा तालाब तली से ऊपर की ओर जमते जिससे उसका अधिकांश जलीय जीवन (जल जीव-जन्तु तथा पौधे) नष्ट हो जाता।

सामान्य ताप पर ठोसों तथा द्रवों की अपेक्षा गैसों में अपेक्षाकृत अधिक प्रसार होता है। द्रवों के लिए, आयतन प्रसार गुणांक अपेक्षाकृत ताप पर निर्भर नहीं करता। परन्तु गैसों के लिए यह ताप पर निर्भर करता है। किसी आदर्श गैस के लिए किसी नियत दाब पर आयतन प्रसार गुणांक का मान आदर्श गैस समीकरण से प्राप्त किया जा सकता है :

$$PV = \mu RT$$

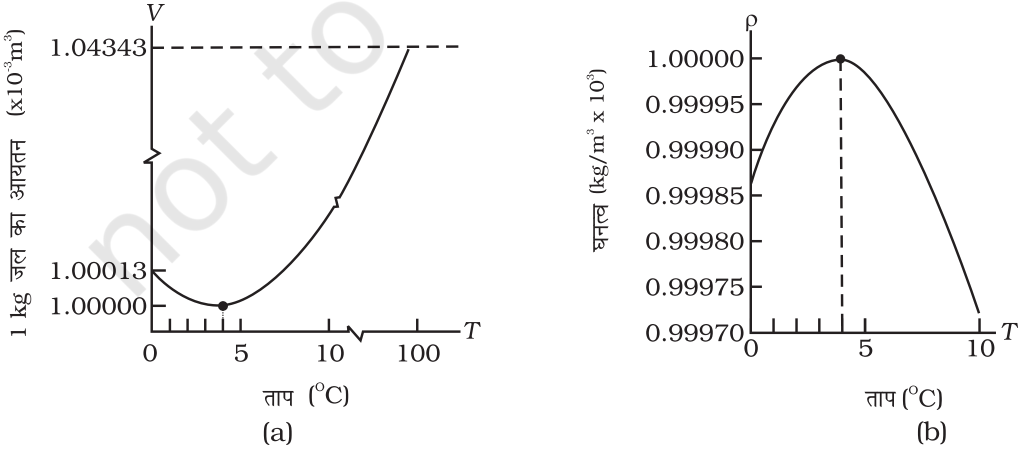
नियत ताप पर

$$P\Delta V = \mu R \Delta T$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T}$$

अर्थात् $\alpha_v = \dfrac{1}{T}$ आदर्श गैस के लिए (10.6)

0°C, $\alpha_v = 3.7 \times 10^{-3}\ K^{-1}$, जो ठोसों तथा द्रवों की अपेक्षा अत्यधिक बड़ा है। समीकरण (10.6) α_v की ताप पर निर्भरता को दर्शाती है। इसका मान ताप में वृद्धि के साथ कम हो जाता है। नियत दाब तथा कक्ष ताप पर किसी गैस के लिए α_v का मान लगभग $3300 \times 10^{-6} K^{-1}$ है, जो कि प्रतिरूपी द्रवों के आयतन प्रसार गुणांक की तुलना में कई कोटि गुना बड़ा है।



चित्र 10.7 जल का तापीय प्रसार।

आयतन प्रसार गुणांक (α_v) तथा रैखिक प्रसार गुणांक (α_l) में एक सरल संबंध है। लंबाई l के किसी ऐसे घन की कल्पना कीजिए जिसमें ताप में ΔT की वृद्धि होने पर सभी दिशाओं में समान रूप से वृद्धि होती है। तब

$$\Delta l = \alpha_l \, l \, \Delta T$$

इसीलिए, $\Delta V = (l+\Delta l)^3 - l^3 \quad 3l^2 \, \Delta l$ (10.7)

समीकरण 10.7 में हमने (Δl) को l की तुलना में छोटा होने के कारण $(\Delta l)^2$ तथा $(\Delta l)^3$ के पदों को उपेक्षणीय मान लिया है। अतः

$$\Delta V = \frac{3V \, \Delta l}{l} = 3V\alpha_l \, \Delta T \qquad (10.8)$$

इससे हमें प्राप्त होता है

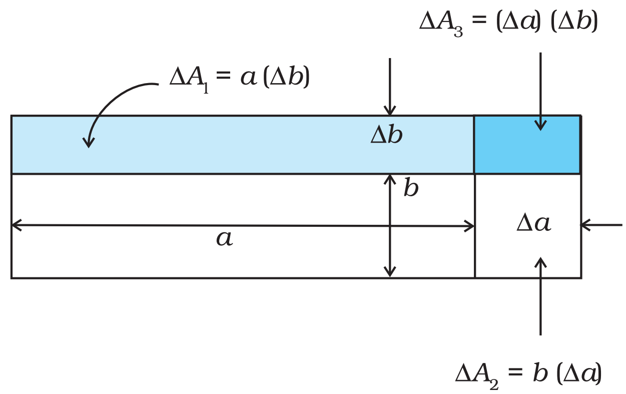
$$\alpha_v = 3\alpha_l \qquad (10.9)$$

क्या होता है, जब किसी छड़ के दोनों सिरों को दृढ़ता से जड़कर इसके तापीय प्रसार को रोका जाता है। स्पष्ट है कि सिरों के दृढ़ अवलंबों द्वारा प्रदत्त बाह्य बलों के कारण छड़ में संपीडन विकृति उत्पन्न हो जाती है जिसके तदनुरूपी छड़ में एक प्रतिबल उत्पन्न होता है जिसे **तापीय प्रतिबल** कहते हैं। उदाहरण के लिए 40 cm^2 अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल की 5m लंबी स्टील की ऐसी छड़ के बारे में विचार कीजिए जिसके तापीय प्रसार को रोका जाता है, जबकि उसके ताप में 10°C की वृद्धि की गई है। स्टील का रैखिक प्रसार गुणांक $\alpha_{l(\text{स्टील})} = 1.2 \times 10^{-5}\ K^{-1}$ है। अतः यहाँ संपीडन विकृति $\frac{\Delta l}{l} = \alpha_{l(\text{स्टील})} \Delta T = 1.2{\times}10^{-5}{\times}10 = 1.2{\times}10^{-4}$। स्टील के लिए यंग प्रत्यास्थता गुणांक $Y_{(\text{स्टील})} = 2{\times}10^{11}\ N\ m^{-2}$। अतः छड़ में उत्पन्न तापीय प्रतिबल $\frac{\Delta F}{A} = Y_{\text{स्टील}}\left(\frac{\Delta l}{l}\right) = 2.4{\times}10^{7}\ N\ m^{-2}$, इसके तदनुरूपी बाह्य बल

$$\Delta F = AY_{\text{स्टील}}\left(\frac{\Delta l}{l}\right) = 2.4{\times}10^{7}{\times}40{\times}10^{-4} \simeq 10^{5}\ N$$

यदि बाह्य सिरों पर आबद्ध इस प्रकार की स्टील की दो पटरियों के भीतरी सिरे संपर्क में हैं तो इस परिमाण के बल पटरियों को सरलता से मोड़ सकते हैं।

उदाहरण 10.1 यह दर्शाइए कि किसी ठोस की आयताकार शीट का क्षेत्र प्रसार गुणांक, $(\Delta A/A)/\Delta T$, इसके रैखिक प्रसार गुणांक α_l का दो गुना होता है।



चित्र 10.8

हल किसी ठोस पदार्थ की आयताकार शीट जिसकी लंबाई a तथा चौड़ाई b (चित्र 10.8) है, पर विचार कीजिए। जब ताप में ΔT की वृद्धि की जाती है तो a में $\Delta a = \alpha_l a \Delta T$ तथा b में $\Delta b = \alpha_l b \, \Delta T$ की वृद्धि होती है। चित्र 10.8 के अनुसार क्षेत्रफल में वृद्धि

$$\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3$$
$$\Delta A = a\,\Delta b + b\Delta a + (\Delta a)\ (\Delta b)$$
$$= a\alpha_l b\,\Delta T + b\alpha_l\, a\,\Delta T + (\alpha_l)^2\, ab\,(\Delta T)^2$$
$$= \alpha_l\, ab\,\Delta T\,(2 + \alpha_l\,\Delta T) = \alpha_l\, A\,\Delta T\,(2 + \alpha_l\,\Delta T)$$

चूंकि $\alpha_l \quad 10^{-5}\ K^{-1}$, तब सारणी 10.1 के अनुसार 2 की तुलना में गुणनफल, $\alpha_l\,\Delta T$ का मान बहुत छोटा है, अतः इसे उपेक्षणीय माना जा सकता है। अतः

$$\left(\frac{\Delta A}{A}\right)\frac{1}{\Delta T} \simeq 2\alpha_l$$

उदाहरण 10.2 कोई लोहार किसी घोड़ागाड़ी के लकड़ी के पहिए की नेमी पर लोहे की रिंग जड़ता है। 27°C पर नेमी तथा लोहे की रिंग के व्यास क्रमशः 5.243m तथा 5.231 m हैं। लोहे की रिंग को किस ताप तक तप्त किया जाए कि वह पहिए की नेमी पर ठीक बैठ जाए।

हल

दिया गया है कि, $T_1 = 27°C$

$$L_{T1} = 5.231\ m$$
$$L_{T2} = 5.243\ m$$

अतः

$$L_{T2} = L_{T1}\ [1+\alpha_l\,(T_2 - T_1)]$$
$$5.243m = 5.231m\ [1 + 1.20 \times 10^{-5}\ K^{-1}\ (T_2 - 27°C]$$

अथवा $T_2 = 218°C$

10.6 विशिष्ट ऊष्मा धारिता

किसी बर्तन में जल लेकर उसे किसी बर्नर पर गर्म करना आरंभ कीजिए। शीघ्र ही आप जल में बुलबुले ऊपर उठते देखेंगे। जैसे ही ताप में वृद्धि की जाती है, तो जल के कणों की गति में विक्षोभ होने तक वृद्धि होती जाती है और जल उबलने लगता है। वे कौन से कारक हैं जिन पर किसी पदार्थ का ताप बढ़ाने के लिए आवश्यक ऊष्मा की मात्रा निर्भर करती है? इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए प्रथम चरण में, जल की कुछ मात्रा को गर्म करके उसके ताप में कुछ वृद्धि, जैसे 20°C कीजिए और उसमें लगा समय नोट कीजिए। पुन: इतना ही जल लेकर अब इसके ताप में ऊष्मा के उसी स्रोत द्वारा 40°C की ताप वृद्धि कीजिए और विराम घड़ी से समय नोट कीजिए। आप यह पाएंगे कि इस बार लगभग दो गुना समय लगता है। अत: समान मात्रा के जल के ताप में दो गुनी वृद्धि करने के लिए दो गुनी ऊष्मा की मात्रा की आवश्यकता होती है।

दूसरे चरण में, अब मान लीजिए आप दो गुना जल लेकर इसे गर्म करने के लिए उसी स्रोत का उपयोग करके इसके ताप में 20°C की ताप-वृद्धि करते हैं। आप यह पाएँगे कि इस बार फिर गर्म करने में पहले चरण की अपेक्षा लगभग दो गुना समय लगा है।

तीसरे चरण में, जल के स्थान पर, अब किसी तेल, जैसे सरसों का तेल, की समान मात्रा लेकर इसके ताप में भी 20°C की वृद्धि कीजिए। अब उसी विराम घड़ी द्वारा समय नोट कीजिए। आप यह पाएँगे कि इस बार पहले की अपेक्षा कम समय लगा है। अत: आवश्यक ऊष्मा की मात्रा समान मात्रा के जल के ताप में समान वृद्धि के लिए आवश्यक ऊष्मा की मात्रा से कम है।

उपरोक्त प्रेक्षण यह दर्शाते हैं कि किसी दिए गए पदार्थ को उष्ण करने के लिए आवश्यक ऊष्मा की मात्रा इसके द्रव्यमान m, ताप में परिवर्तन ΔT, तथा पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करती है। किसी पदार्थ के ताप में परिवर्तन, जबकि ऊष्मा की एक दी गई मात्रा को वह पदार्थ अवशोषित करता है अथवा बहिष्कृत करता है, एक राशि, जिसे उस पदार्थ की **ऊष्मा धारिता** कहते हैं, द्वारा अभिलक्षित की जाती है। किसी पदार्थ की ऊष्मा धारिता S को हम इस प्रकार परिभाषित करते हैं :

$$S = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad (10.10)$$

यहाँ ΔQ पदार्थ के ताप में T से $T + \Delta T$ तक परिवर्तन करने के लिए आवश्यक ऊष्मा की मात्रा है।

आपने यह प्रेक्षण किया है कि जब विभिन्न पदार्थों के समान द्रव्यमानों को समान मात्रा में ऊष्मा प्रदान की जाती है, तो उनमें होने वाले परिणामी ताप परिवर्तन समान नहीं होते। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि किसी पदार्थ के एकांक द्रव्यमान में एकांक ताप-परिवर्तन के लिए वह पदार्थ ऊष्मा की एक निश्चित व अनन्य मात्रा का अवशोषण अथवा बहिष्करण करता है, इस मात्रा को पदार्थ की **विशिष्ट ऊष्मा धारिता** कहते हैं।

यदि m द्रव्यमान के किसी पदार्थ द्वारा ΔT ताप परिवर्तन के लिए ΔQ ऊष्मा की मात्रा अवशोषित अथवा बहिष्कृत करनी होती है तो उस पदार्थ की विशिष्ट ऊष्मा धारिता s को इस प्रकार व्यक्त किया जाता है

$$s = \frac{S}{m} = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad (10.11)$$

विशिष्ट ऊष्मा धारिता किसी पदार्थ का वह गुण होता है जो इस पदार्थ द्वारा एक दिए गए परिमाण की ऊष्मा को अवशोषित (अथवा बहिष्कृत) करने पर (यदि प्रावस्था परिवर्तन नहीं है) उस पदार्थ के ताप में होने वाले परिवर्तन को निर्धारित करता है। इसे "ऊष्मा की वह मात्रा जो किसी पदार्थ का एकांक द्रव्यमान अपने ताप में एकांक परिवर्तन के लिए अवशोषित अथवा बहिष्कृत करता है" के रूप में परिभाषित किया जाता है। विशिष्ट ऊष्मा धारिता का SI मात्रक $J\,kg^{-1}\,K^{-1}$ है।

यदि पदार्थ की मात्रा का उल्लेख "द्रव्यमान m किलोग्रामों" में न करके मोल μ के पदों में किया जाता है तो हम किसी पदार्थ की ऊष्मा धारिता प्रति मोल को इस प्रकार व्यक्त करते हैं

$$s = \frac{S}{\mu} = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad (10.12)$$

जहाँ C **मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता** कहलाती है। S की भांति C भी पदार्थ की प्रकृति तथा इसके ताप पर निर्भर करता है। मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता का SI मात्रक $J\,mol^{-1}\,K^{-1}$ है।

परन्तु, गैसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता के संबंध में C को परिभाषित करने के लिए अतिरिक्त प्रतिबंधों की आवश्यकता होती है। इस प्रकरण में दाब अथवा आयतन को नियत रखकर भी ऊष्मा स्थानांतर किया जा सकता है। यदि ऊष्मा स्थानांतरण के समय गैस का दाब नियत रखा जाता है, तो इसे **नियत दाब पर मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता** कहते हैं और इसे C_p द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। इसके विपरीत, यदि ऊष्मा स्थानांतरण के समय गैस का आयतन नियत रखते हैं, तो इसे **नियत आयतन पर मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता** कहते हैं और इसे C_v द्वारा निर्दिष्ट करते हैं। इसके विस्तृत वर्णन के लिए

सारणी 10.3 वायुमण्डलीय दाब तथा कक्ष ताप पर कुछ पदार्थों की विशिष्ट ऊष्मा धारिताएँ

पदार्थ	विशिष्ट ऊष्मा धारिता ($J\ kg^{-1}\ K^{-1}$)	पदार्थ	विशिष्ट ऊष्मा धारिता ($J\ kg^{-1}\ K^{-1}$)
एलुमिनियम	900.0	बर्फ	2060
कार्बन	506.5	काँच	840
ताँबा	386.4	आयरन	450
लैड	127.7	कैरोसीन	2118
चाँदी	236.1	खाद्य तेल	1965
टंगस्टन	134.1	पारा	140
जल	4186.0		

अध्याय 11 देखिए। सारणी 10.3 में वायुमण्डलीय दाब तथा कक्ष ताप पर कुछ पदार्थों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता के मापे हुए मानों की सूची दी गई है जबकि सारणी 10.4 में कुछ गैसों की मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता की सूची दी गई है। सारणी 10.3 से आप यह ध्यान में रख सकते हैं कि अन्य पदार्थों की तुलना में जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता उच्चतम होती है। यही कारण है कि स्वचालित वाहनों के रैडिएटरों में जल का उपयोग शीतलक के रूप में किया जाता है तथा सिकाई के लिए उपयोग होने वाली तप्त जल थैलियों में जल का उपयोग तापक के रूप में किया जाता है। उच्च विशिष्ट ऊष्मा धारिता होने के कारण गर्मियों में थल की अपेक्षा जल बहुत धीमी गति से गर्म होता है फलस्वरूप समुद्र की ओर से आने वाली पवनें शीतल होती हैं। अब आप यह बता सकते हैं कि मरुक्षेत्रों में पृथ्वी का पृष्ठ दिन के समय शीघ्र उष्ण तथा रात्रि के समय शीघ्र शीतल क्यों हो जाता है।

सारणी 10.4 कुछ गैसों की मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिताएँ

गैस	C_p ($J\ mol^{-1}K^{-1}$)	C_v ($J\ mol^{-1}K^{-1}$)
He	20.8	12.5
H_2	28.8	20.4
N_2	29.1	20.8
O_2	29.4	21.1
CO_2	37.0	28.5

10.7 ऊष्मामिति

किसी निकाय को वियुक्त निकाय तब कहा जाता है जब उस निकाय तथा उसके परिवेश के बीच कोई ऊष्मा विनिमय अथवा ऊष्मा स्थानांतर नहीं होता। जब किसी वियुक्त निकाय के विभिन्न भाग भिन्न-भिन्न ताप पर होते हैं, तब ऊष्मा की कुछ मात्रा उच्च ताप के भाग से निम्न ताप वाले भाग को स्थानांतरित हो जाती है। उच्च ताप के भाग द्वारा लुप्त ऊष्मा निम्न ताप के भाग द्वारा ऊष्मा लब्धि के बराबर होती है।

ऊष्मामिति का अर्थ ऊष्मा मापन है। जब कोई उच्च ताप की वस्तु किसी निम्न ताप की वस्तु के संपर्क में लाई जाती है, तो उच्च ताप की वस्तु द्वारा लुप्त ऊष्मा निम्न ताप की वस्तु द्वारा ऊष्मा लब्धि के बराबर होती है, बशर्ते कि निकाय से ऊष्मा का कोई भाग भी परिवेश में पलायन न करे। ऐसी युक्ति जिसमें ऊष्मा मापन किया जा सके उसे **ऊष्मामापी** कहते हैं (चित्र 10.20)। यह धातु के एक बर्तन तथा उसी पदार्थ जैसे ताँबा अथवा एल्युमिनियम के विडोलक से मिलकर बना होता है। इस बर्तन को एक लकड़ी के आवरण के भीतर, जिसमें ऊष्मारोधी पदार्थ जैसे काँच तंतु भरा होता है, रखा जाता है। बाहरी आवरण ऊष्मा कवच की भांति कार्य करता है तथा यह भीतरी बर्तन से ऊष्मा-हानि को कम कर देता है। बाहरी आवरण में एक छिद्र बनाया जाता है जिससे होते हुए पारे का तापमापी बर्तन के भीतर पहुँचता है। निम्नलिखित उदाहरण द्वारा आपको किसी दिए गए ठोस पदार्थ की विशिष्ट ऊष्मा धारिता ज्ञात करने की ऐसी विधि मिल जाएगी जिसमें लुप्त ऊष्मा = ऊष्मा लब्धि के सिद्धांत का उपयोग किया जाता है।

▶ ***उदाहरण 10.3*** 0.047 kg द्रव्यमान के किसी ऐलुमिनियम के गोले को काफी समय के लिए उबलते जल से भरे बर्तन में रखा गया है ताकि गोले का ताप 100°C हो जाए। इसके पश्चात् गोले को तुरन्त 0.14 kg द्रव्यमान के ताँबे के ऊष्मामापी, जिसमें 20°C का 0.25 kg जल भरा है, में स्थानांतरित किया जाता है। जल के ताप में वृद्धि होती है तथा यह 23°C पर स्थायी अवस्था ग्रहण कर लेता है। ऐलुमिनियम की विशिष्ट ऊष्मा धारिता परिकलित कीजिए।

हल इस उदाहरण को हल करते समय हम इस तथ्य का उपयोग करेंगे कि स्थायी अवस्था में ऐलुमिनियम के गोले द्वारा दी गई ऊष्मा जल तथा ऊष्मामापी द्वारा अवशोषित ऊष्मा के बराबर होती है।

ऐलुमिनियम के गोले का द्रव्यमान (m_1) = 0.047 kg

ऐलुमिनियम के गोले का आरंभिक ताप = 100°C

अंतिम ताप = 23°C

ताप में परिवर्तन (ΔT) = (100°C - 23°C) = 77°C

मान लीजिए, ऐलुमिनियम की विशिष्ट ऊष्मा धारिता = s_{Al}

ऐलुमिनियम के गोले द्वारा लुप्त ऊष्मा की मात्रा =

$m_1 s_{Al} \Delta T = 0.047 \text{kg} \times s_{Al} \times 77°\text{C}$

जल का द्रव्यमान (m_2) = 0.25 kg

ऊष्मामापी का द्रव्यमान (m_3) = 0.14 kg

जल तथा ऊष्मामापी का आरंभिक ताप = 20°C

मिश्रण का अंतिम ताप = 23°C

ताप में परिवर्तन (ΔT_2) = 23°C–20°C = 3°C

जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता (s_w)

= 4.18×10^3 J kg^{-1} °C^{-1}

ताँबे के ऊष्मामापी की विशिष्ट ऊष्मा धारिता

= 0.386×10^3 J kg^{-1} °C^{-1}

जल तथा ऊष्मामापी द्वारा ऊष्मालब्धि की मात्रा

= $m_2 s_w \Delta T_2 + m_3 s_{cu} \Delta T_2$

= $(m_2 s_w + m_3 s_{cu})(\Delta T_2)$

= 0.25 kg ×4.18 × 10^3 J kg^{-1} °C^{-1} + 0.14 kg × 0.386 × 10^3 J kg^{-1} °C^{-1}) (23°C – 20°C)

स्थायी अवस्था में ऐलुमिनियम के गोले द्वारा लुप्त ऊष्मा

= जल द्वारा ऊष्मा लब्धि + ऊष्मामापी द्वारा ऊष्मा लब्धि

0.047 kg × s_{Al} × 77°C

= (0.25 kg × 4.18 × 10^3 J kg^{-1} °C^{-1}+ 0.14 kg × 0.386 × 10^3 J kg^{-1} °C^{-1})(3°C)

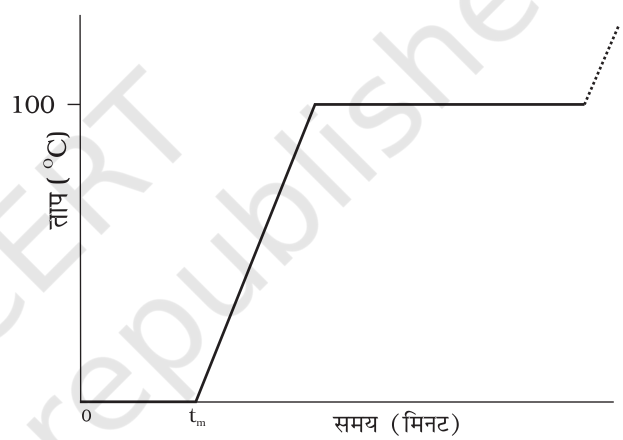
s_{Al} = 0.911 kJ kg^{-1} °C^{-1} ◀

10.8 अवस्था परिवर्तन

सामान्य रूप में द्रव्य की तीन अवस्थाएँ हैं : ठोस, द्रव तथा गैस। इन अवस्थाओं में से किसी एक अवस्था से दूसरी अवस्था में संक्रमण को अवस्था परिवर्तन कहते हैं। दो सामान्य अवस्था परिवर्तन ठोस से द्रव तथा द्रव से गैस (तथा विलोमत:) हैं। ये परिवर्तन तब ही हो सकते हैं जबकि पदार्थ तथा उसके परिवेश के बीच ऊष्मा का विनिमय होता है। तापन अथवा शीतलन पर अवस्था परिवर्तन का अध्ययन करने के लिए आइए निम्नलिखित क्रियाकलाप करते हैं।

क्रियाकलाप 10.1

एक बीकर में कुछ हिम क्यूब लीजिए। हिम का ताप नोट कीजिए। इसे धीरे-धीरे किसी अचल ऊष्मा स्रोत पर गर्म करना आरंभ कीजिए। हर एक मिनट के पश्चात् ताप नोट कीजिए। जल तथा हिम के मिश्रण को निरंतर विडोलित करते रहिए। समय और ताप के बीच ग्राफ आलेखित कीजिए (चित्र 10.9)। आप यह पाएँगे कि जब तक बीकर में हिम उपस्थित है तब तक ताप में कोई परिवर्तन नहीं होता। उपरोक्त प्रक्रिया में, निकाय को ऊष्मा की सतत आपूर्ति होने पर भी उसके ताप में कोई परिवर्तन नहीं होता। यहाँ संभरण की जा रही ऊष्मा का उपयोग ठोस (हिम) से द्रव (जल) में अवस्था परिवर्तन किए जाने में हो रहा है।

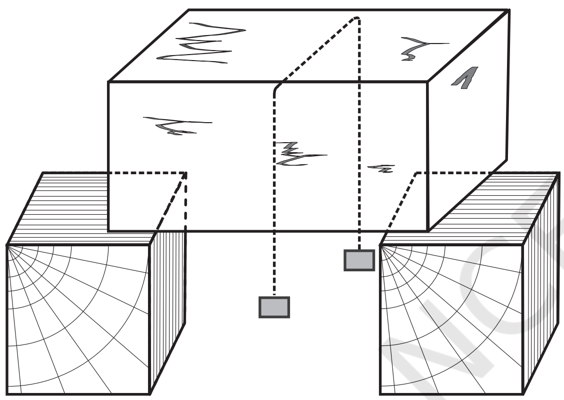


चित्र 10.9 हिम को गर्म करने पर अवस्था में हुए परिवर्तनों को ताप और समय के बीच ग्राफ आलेखित करके दर्शाना (पैमाने के अनुसार नहीं)।

ठोस से द्रव में अवस्था परिवर्तन को **गलन** (अथवा पिघलना) तथा द्रव से ठोस में अवस्था परिवर्तन को **हिमीकरण** कहते हैं। यह पाया गया है कि ठोस पदार्थ की समस्त मात्रा के पिघलने तक ताप नियत रहता है अर्थात् **ठोस से द्रव में अवस्था परिवर्तन की अवधि में पदार्थ की दोनों अवस्थाएँ ठोस तथा द्रव तापीय साम्य में सहवर्ती होती हैं।** वह ताप जिस पर किसी पदार्थ की ठोस तथा द्रव अवस्थाएँ परस्पर तापीय साम्य में होती हैं उसे उस पदार्थ का **गलनांक** कहते हैं। यह किसी पदार्थ का अभिलक्षण होता है। यह दाब पर भी निर्भर करता है। मानक वायुमण्डलीय दाब पर किसी पदार्थ के गलनांक को **प्रसामान्य गलनांक** कहते हैं। हिम के गलने की प्रक्रिया को समझने के लिए आइए निम्नलिखित क्रियाकलाप करें।

क्रियाकलाप 10.2

एक हिम शिला लीजिए। एक धातु का तार लेकर उसके दोनों सिरों से समान भार जैसे 5 kg के बाट बाँधिए। चित्र 10.10 में दर्शाए अनुसार इस तार को हिम शिला के ऊपर रखिए। आप यह देखेंगे कि तार हिमशिला में से पार हो जाता है। ऐसा होने का कारण यह है कि तार के ठीक नीचे दाब में वृद्धि के कारण हिम निम्न ताप पर पिघल जाता है। जब तार वहाँ से गुजर जाता है, तो तार के ऊपर का जल पुनः हिमीभूत हो जाता है। इस प्रकार तार हिम शिला से पार हो जाता है तथा शिला विभक्त नहीं होती। पुनर्हिमीभवन की इस परिघटना को **पुनर्हिमायन** कहते हैं। हिम पर 'स्केट' के नीचे जल बनने के कारण ही 'स्केटिंग' करना संभव हो पाता है। दाब में वृद्धि के कारण जल बनता है जो स्नेहक की भांति कार्य करता है।



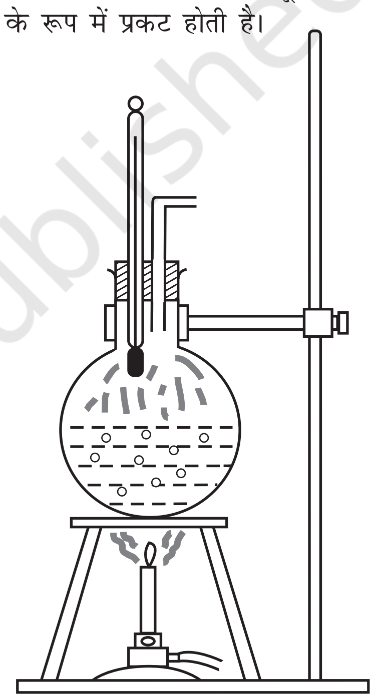
चित्र 10.10

जब समस्त हिम जल में रूपांतरित हो जाता है और इसके पश्चात् जैसे ही हम और आगे गर्म करना चालू रखते हैं तो हम यह पाते हैं कि ताप में वृद्धि होनी आरंभ हो जाती है चित्र 10.9। ताप में यह वृद्धि निरंतर लगभग 100 °C तक होती है और यहाँ फिर ताप स्थिर हो जाता है। अब फिर जल को आपूर्त ऊष्मा का उपयोग जल को द्रव अवस्था से वाष्प अथवा गैसीय अवस्था में रूपांतरित करने में होता है।

द्रव से वाष्प (अथवा गैस) में अवस्था परिवर्तन को **वाष्पन** कहते हैं। यह पाया गया है कि समस्त द्रव के वाष्प में रूपांतरित होने तक ताप नियत रहता है। अर्थात्, ठोस से वाष्प में अवस्था परिवर्तन की अवधि में पदार्थ की दोनों अवस्थाएँ द्रव तथा गैस तापीय साम्य में सहवर्ती होती हैं। वह ताप जिस पर किसी पदार्थ की द्रव तथा वाष्प दोनों अवस्थाएँ तापीय साम्य में परस्पर सहवर्ती होती हैं उसे उस पदार्थ का **क्वथनांक** कहते हैं। जल के क्वथन की प्रक्रिया को समझने के लिए आइए निम्नलिखित क्रियाकलाप करें।

क्रियाकलाप 10.3

आधे से अधिक जल से भरा एक गोल पेंदी का फ्लास्क लीजिए। चित्र 10.11 में दर्शाए अनुसार फ्लास्क के मुख पर लगी कार्क के वेधों से होकर भीतर जाते हुए एक तापमापी तथा एक भाप निकास कार्क में लगाइए और फ्लास्क को बर्नर के ऊपर रखिए। जैसे ही जल गर्म होता है, तो पहले यह देखिए कि वह वायु, जो जल में विलीन थी, छोटे-छोटे बुलबुलों के रूप में बाहर आएगी। तत्पश्चात् भाप के बुलबुले फ्लास्क की तली में बनेंगे, परन्तु जैसे ही वे शीर्षभाग के पास के शीतल जल की ओर ऊपर उठते हैं, संघनित होकर अदृश्य हो जाते हैं। अंततः जैसे ही समस्त जल का ताप 100°C पर पहुँचता है, भाप के बुलबुले पृष्ठ पर पहुँचते हैं और **क्वथन** होने लगता है। फ्लास्क के भीतर भाप दिखाई नहीं देती, परन्तु जैसे ही फ्लास्क से बाहर निकलती है, यह जल की अत्यंत छोटी बूँदों के रूप में संघनित होकर धुंध के रूप में प्रकट होती है।



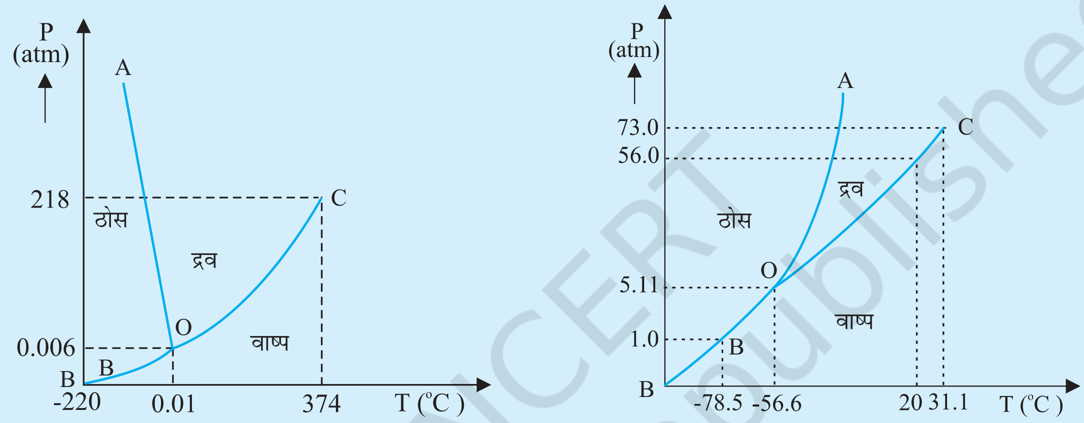
चित्र 10.11 क्वथन प्रक्रिया।

अब यदि कुछ सेकंडों के लिए भाप निकास को बंद कर दें, ताकि फ्लास्क के भीतर दाब में वृद्धि हो, तब आप यह देखेंगे कि क्वथन रुक जाता है। जल में क्वथन प्रक्रिया पुनः आरंभ होने तक जल के ताप में वृद्धि करने के लिए (दाब पर निर्भर करते हुए) और ऊष्मा की आवश्यकता होती है। इस प्रकार दाब में वृद्धि के साथ क्वथनांक में वृद्धि हो जाती है।

आइए अब हम बर्नर को हटा लेते हैं तथा जल को लगभग 80°C तक ठंडा होने देते हैं। फ्लास्क से तापमापी तथा भाप निकास हटाकर फ्लास्क के मुँह को वायुरुद्ध कर्क से कस कर

त्रिक बिंदु

किसी पदार्थ का ताप उसकी अवस्था परिवर्तन (प्रावस्था परिवर्तन) की अवधि में नियत रहता है। किसी पदार्थ के ताप T तथा दाब P के बीच आलेखित ग्राफ को प्रावस्था आरेख अथवा $P-T$ आरेख कहते हैं। नीचे दिखाए गए चित्र में जल तथा CO_2 के प्रावस्था आरेख दर्शाए गए हैं। इस प्रकार का प्रावस्था आरेख $P-T$ तल को ठोस क्षेत्र, वाष्प क्षेत्र तथा द्रव क्षेत्र में विभाजित करता है। इन क्षेत्रों को वक्रों जैसे **ऊर्ध्वपातन वक्र** (BO), **संगलन वक्र** (AO) तथा **वाष्पन वक्र** (CO) द्वारा पृथक किया जाता है। ऊर्ध्वपातन वक्र BO के बिंदु उस अवस्था को निरूपित करते हैं जिस पर ठोस तथा वाष्प प्रावस्थाएँ सहवर्ती होती हैं। संगलन वक्र AO के बिंदु उस अवस्था का निरूपण करते हैं जिसमें ठोस तथा द्रव प्रावस्थाएँ सहवर्ती होती हैं। वाष्पन वक्र CO के बिंदु उस अवस्था को निरूपित करते हैं जिसमें द्रव तथा वाष्प प्रावस्थाएँ सहवर्ती होती हैं। वह ताप तथा दाब जिस पर संगलन वक्र, वाष्पन वक्र तथा ऊर्ध्वपातन वक्र मिलते हैं तथा किसी पदार्थ की तीनों प्रावस्थाएँ सहवर्ती होती हैं उस पदार्थ का **त्रिक बिंदु** कहलाता है। उदाहरण के लिए, जल के त्रिक बिंदु को ताप 273.16K तथा दाब 6.11×10^{-3} Pa द्वारा निरूपित करते हैं।



(a) जल तथा (b) CO_2 के लिए दाब-ताप प्रावस्था आरेख (पैमाने के अनुसार नहीं)

बंद कर देते हैं। अब फ्लास्क को स्टैंड पर उलटा करके रखते हैं और फ्लास्क पर हिमशीतित जल उड़ेलते हैं। ऐसा करने पर फ्लास्क के भीतर की जलवाष्प संघनित होकर फ्लास्क के भीतर जल के पृष्ठ पर दाब को कम कर देती है। अब निम्न ताप पर जल में पुनः क्वथन आरंभ हो जाता है। इस प्रकार दाब में कमी होने पर क्वथनांक घट जाता है।

इससे यह स्पष्ट हो जाता है कि पहाड़ी क्षेत्रों में भोजन पकाना क्यों कठिन होता है। उच्च तुंगता पर वायुमण्डलीय दाब निम्न होता है, जिसके कारण वहाँ पर समुद्र तट की तुलना में जल का क्वथनांक घट जाता है। इसके विपरीत, दाब कुकर के भीतर दाब में वृद्धि करके क्वथनांक बढ़ाया जाता है। इसीलिए पाकक्रिया तेज होती है। मानक वायुमण्डलीय दाब पर किसी पदार्थ के क्वथनांक को **प्रसामान्य क्वथनांक** कहते हैं।

परन्तु, सभी पदार्थ इन तीनों अवस्थाओं – ठोस, द्रव तथा गैस से नहीं गुजरते। कुछ पदार्थ ऐसे भी हैं जो सामान्यतः सीधे ठोस से वाष्प अवस्था में और विलोमतः पहुँच जाते हैं। किसी पदार्थ का ठोस अवस्था से वाष्प अवस्था में, बिना द्रव अवस्था से गुजरे, पहुँचना **ऊर्ध्वपातन** कहलाता है तथा ऐसे पदार्थ को **ऊर्ध्वपातन** पदार्थ कहते हैं। शुष्क हिम (ठोस CO_2) का ऊर्ध्वपातन होता है, आयोडीन भी इसी प्रकार का पदार्थ है। ऊर्ध्वपातन की प्रक्रिया के समय किसी पदार्थ की दोनों अवस्थाएँ – ठोस तथा वाष्प अवस्था तापीय साम्य में सहवर्ती होती हैं।

10.8.1 गुप्त ऊष्मा

अनुभाग 10.8 में हमने यह सीखा है कि जब कोई पदार्थ अवस्था परिवर्तन की स्थिति में होता है तो पदार्थ तथा उसके परिवेश के बीच ऊष्मा की एक निश्चित मात्रा स्थानांतरित होती है। किसी पदार्थ की अवस्था परिवर्तन की अवधि में, ऊष्मा की मात्रा का प्रति एकांक द्रव्यमान स्थानांतरण, उस पदार्थ की इस

सारणी 10.5 1 atm दाब पर विभिन्न पदार्थों के अवस्था परिवर्तन के ताप तथा गुप्त ऊष्माएँ

पदार्थ	गलनांक (°C)	L_f (10^5J kg^{-1})	क्वथनांक (°C)	L_v (10^5J kg^{-1})
इथैनॉल	–114	1.0	78	8.5
सोना	1063	0.645	2660	15.8
लैड	328	0.25	1744	8.67
पारा	–39	0.12	357	2.7
नाइट्रोजन	–210	0.26	–196	2.0
ऑक्सीजन	–219	0.14	–183	2.1
जल	0	3.33	100	22.6

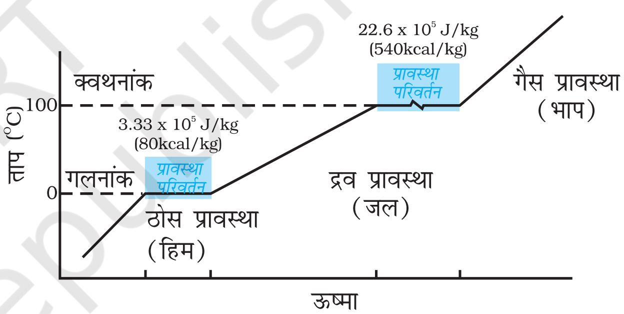
प्रक्रिया के लिए **गुप्त ऊष्मा** कहलाती है। उदाहरण के लिए, यदि –10°C के किसी दिए गए परिमाण के हिम को गर्म किया जाए तो उसका ताप इसके गलनांक (0°C) तक बढ़ता है। इस ताप पर और ऊष्मा देने पर ताप में वृद्धि नहीं होती, परन्तु हिम पिघलने लगती है अर्थात् अवस्था परिवर्तन होता है। जब समस्त हिम पिघल जाती है, तो और ऊष्मा देने पर जल के ताप में वृद्धि होती है। इसी प्रकार की स्थिति क्वथनांक पर द्रव-गैस अवस्था परिवर्तन के समय होती है। उबलते जल को और ऊष्मा प्रदान करने पर ताप में वृद्धि नहीं होती; वाष्पन हो जाता है।

अवस्था परिवर्तन के समय आवश्यक ऊष्मा का परिमाण जिस पदार्थ की अवस्था में परिवर्तन हो रहा है उसके द्रव्यमान तथा रूपांतरण-ऊष्मा पर निर्भर करता है। इस प्रकार, यदि m उस पदार्थ का द्रव्यमान है जिसका एक अवस्था से दूसरी अवस्था में परिवर्तन हो रहा है, तब आवश्यक ऊष्मा का परिमाण

$$Q = mL$$

अथवा $$L = Q/m \tag{10.13}$$

यहाँ L को गुप्त ऊष्मा कहते हैं तथा यह पदार्थ का अभिलक्षण है। इसका SI मात्रक J kg^{-1} है। L का मान दाब पर भी निर्भर करता है। प्रायः इसके मान का उद्धरण मानक वायुमण्डलीय दाब पर किया जाता है। ठोस-द्रव अवस्था परिवर्तन के लिए गुप्त ऊष्मा को **संगलन की गुप्त ऊष्मा** (L_f) कहते हैं, तथा द्रव-गैस अवस्था परिवर्तन के लिए गुप्त ऊष्मा को **वाष्पन की गुप्त ऊष्मा** (L_v) कहते हैं। इसे हम प्रायः संगलन ऊष्मा तथा वाष्पन ऊष्मा कहते हैं। चित्र 10.12 में जल के किसी परिमाण के लिए ताप तथा ऊष्मा के बीच ग्राफ का आलेख दर्शाया गया है। सारणी 10.5 में कुछ पदार्थों की गुप्त ऊष्मा, गलनांक तथा क्वथनांक दिए गए हैं।



चित्र 10.12 जल के लिए ताप तथा ऊष्मा के बीच ग्राफ आलेखन (पैमाने के अनुसार नहीं)।

ध्यान दीजिए कि जब अवस्था परिवर्तन के समय ऊष्मा दी (अथवा ली) जाती है, तो ताप नियत रहता है। ध्यान से देखिए कि चित्र 10.12 में प्रावस्था रेखाओं की प्रवणताएँ समान नहीं हैं जो यह संकेत देता है कि विभिन्न अवस्थाओं की विशिष्ट ऊष्मा धारिताएँ समान नहीं हैं। जल के लिए, संगलन तथा वाष्पन की गुप्त ऊष्माएँ क्रमशः $L_f = 3.33\times10^5$ J kg^{-1} तथा $L_v = 22.6\times10^5$ J kg^{-1} हैं। अर्थात् 1 kg हिम को 0°C पर गलन के लिए 3.33×10^5 J ऊष्मा चाहिए तथा 1 kg जल को 100°C पर भाप में परिवर्तन होने के लिए 22.6×10^5 J ऊष्मा चाहिए। अतः 100°C के जल की अपेक्षा 100°C की भाप में 22.6×10^5 J kg^{-1} ऊष्मा अधिक होती है। यही कारण है कि उबलते जल की तुलना में उसी ताप की भाप प्रायः अधिक गंभीर जलन देती है।

उदाहरण 10.4 जब 0°C पर रखे 0.15 kg हिम को किसी पात्र में भरे 50°C के 0.30 kg जल में मिलाया जाता है तो मिश्रण का परिणामी ताप 6.7°C हो जाता है। हिम के संगलन की ऊष्मा परिकलित कीजिए। ($s_{जल}$ = 4186 J kg^{-1} ^{0}C^{-1})

हल :

जल द्वारा लुप्त ऊष्मा = $ms_w\,(\theta_f-\theta_i)_w$

= (0.30 kg) (4186 J kg^{-1} °C^{-1}) (50.0°C – 6.7°C)

= 54376.14 J

हिम के गलन के लिए आवश्यक ऊष्मा

= m_2L_f = (0.15 kg) L_f

हिम जल के ताप को अंतिम ताप तक बढ़ाने के लिए आवश्यक ऊष्मा = $m_I s_w\,(\theta_f-\theta_i)_I$

= (0.15 kg) (4186 J kg^{-1} °C^{-1}) (6.7°C – 0°C)

= 4206.93 J

लुप्त ऊष्मा = ऊष्मा लब्धि

54376.14 J = (0.15 kg) L_f + 4206.93 J

L_f = 3.34×10^5 J kg^{-1}

उदाहरण 10.5 किसी ऊष्मामापी में भरे –12°C के 3 kg हिम को वायुमण्डलीय दाब पर 100°C की भाप में परिवर्तित करने के लिए आवश्यक ऊष्मा परिकलित कीजिए। दिया गया है हिम की विशिष्ट ऊष्मा धारिता = 2100 J kg^{-1} ^{0}C^{-1}, जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता = 4186 J kg^{-1} ^{0}C^{-1}, हिम के संगलन की गुप्त ऊष्मा = 3.35×10^5 J kg^{-1} तथा भाप की गुप्त ऊष्मा = 2.256×10^6 J kg^{-1}.

हल : दिया है

हिम का द्रव्यमान m = 3 kg

हिम की विशिष्ट ऊष्मा धारिता, $s_{हिम}$

= 2100 J kg^{-1} ^{0}C^{-1}

जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता, $s_{जल}$

= 4186 J kg^{-1} ^{0}C^{-1}

हिम के संगलन की गुप्त ऊष्मा, $L_{f\,हिम}$

= 3.35×10^5 J kg^{-1}

भाप की गुप्त ऊष्मा, $L_{भाप}$

= 2.256×10^6 J kg^{-1}

अब, Q = –12°C के 3 kg हिम को 100°C की भाप में परिवर्तित करने के लिए आवश्यक ऊष्मा

Q_1 = –12°C के 3 kg हिम को 0°C के हिम में परिवर्तित करने के लिए आवश्यक ऊष्मा

= $m\,s_{हिम}\,\Delta T_1$ = (3 kg) (2100 J kg^{-1}. °C^{-1}) [0–(–12)]°C = 75600 J

Q_2 = 0°C के 3 kg हिम को 0°C के जल में संगलित करने के लिए आवश्यक ऊष्मा

= $m\,L_{f\,हिम}$ = (3 kg) (3.35×10^5 J kg^{-1})

= 1005000 J

Q_3 = 0°C के 3 kg जल को 100°C के जल में परिवर्तित करने के लिए आवश्यक ऊष्मा

= $ms_w\,\Delta T_2$

= (3kg) (4186J kg^{-1} °C^{-1}) (100°C)

= 1255800 J

Q_4 = 100°C के 3 kg जल को 100°C की भाप में परिवर्तित करने के लिए आवश्यक ऊष्मा

= $m\,L_{भाप}$ = (3 kg) (2.256×10^6 J kg^{-1})

= 6768000 J

अतः, $Q = Q_1+Q_2+Q_3+Q_4$

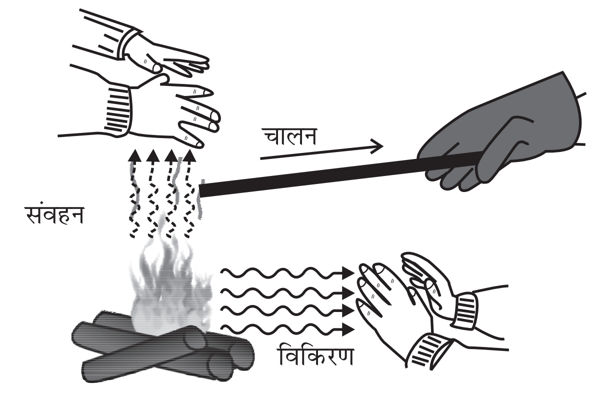
= 75600 J + 1005000J

+ 1255800 J + 6768000 J

= 9.1×10^6 J

10.9 ऊष्मा स्थानांतरण

हमने देखा है कि ताप में अंतर के कारण एक निकाय से दूसरे निकाय में अथवा किसी निकाय के एक भाग से उसके दूसरे भाग में ऊर्जा के स्थानांतरण को ऊष्मा कहते हैं। इस ऊर्जा स्थानांतर के विविध साधन क्या हैं? ऊष्मा स्थानांतरण की सुस्पष्ट तीन विधियाँ हैं: चालन, संवहन तथा विकिरण (चित्र 10.13)।

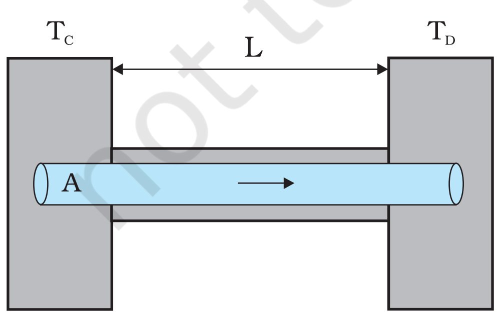


चित्र 10.13 चालन, संवहन तथा विकिरण द्वारा तापन।

10.9.1 चालन

किसी वस्तु के दो संलग्न भागों के बीच उनके तापों में अंतर के कारण ऊष्मा स्थानांतरण की क्रियाविधि को **चालन** कहते हैं। मान लीजिए किसी धातु की छड़ का एक सिरा आग की ज्वाला में रखा है। शीघ्र ही छड़ का दूसरा सिरा इतना गर्म हो जाएगा कि आप उसे अपने नंगे हाथों से पकड़ नहीं सकेंगे। यहाँ छड़ में ऊष्मा स्थानांतरण चालन द्वारा छड़ के तप्त सिरे से छड़ के विभिन्न भागों से होकर दूसरे सिरे तक होता है। गैसें हीन ऊष्मा चालक होती हैं तथा द्रवों की चालकता ठोसों तथा गैसों के बीच की होती है।

मात्रात्मक रूप में, ऊष्मा चालन का वर्णन "किसी पदार्थ में किसी दिए गए तापांतर के लिए ऊष्मा प्रवाह की दर" द्वारा किया जाता है। L लंबाई तथा A एकसमान अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल की धातु की किसी ऐसी छड़ पर विचार कीजिए जिसके दोनों सिरों के बीच तापांतर स्थापित किया गया है। उदाहरण के लिए, ऐसा छड़ के सिरों को क्रमशः T_C तथा T_D ताप के ऊष्मा भंडारों के संपर्क में रखकर किया जा सकता है (चित्र 10.14)। अब हम एक ऐसी आदर्श स्थिति की कल्पना करते हैं जिसमें छड़ के पार्श्व पूर्णतः ऊष्मारोधी हैं ताकि पार्श्वों तथा परिवेश के बीच ऊष्मा का विनिमय नहीं होता।



चित्र 10.14 किसी छड़ जिसके दो सिरों को T_C तथा T_D तापों पर ($T_C > T_D$) स्थापित किया गया है, में चालन द्वारा स्थायी अवस्था ऊष्मा प्रवाह।

कुछ समय के पश्चात् स्थायी अवस्था आ जाती है; छड़ का ताप दूरी के साथ एकसमान रूप से T_C से T_D तक घटता है; ($T_C > T_D$)। C पर ऊष्मा भण्डार एक नियत दर पर ऊष्मा की आपूर्ति करता है, जो छड़ से स्थानांतरित होकर उसी दर से D पर स्थित ऊष्मा भंडार में पहुँच जाती है। प्रयोगों द्वारा यह पाया जाता है कि इस स्थायी अवस्था में, ऊष्मा प्रवाह की दर H तापांतर ($T_C - T_D$) तथा अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल, A के अनुक्रमानुपाती और छड़ की लंबाई L के व्युत्क्रमानुपाती होती है:

$$H = KA\frac{T_C - T_D}{L} \qquad (10.14)$$

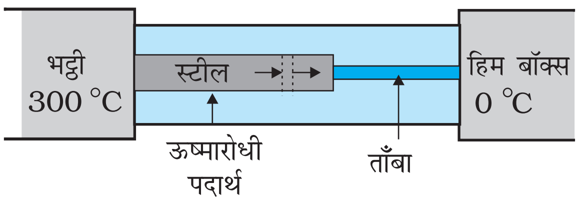
आनुपातिकता स्थिरांक K को पदार्थ की **ऊष्मा चालकता** कहते हैं। किसी पदार्थ के लिए K का मान जितना अधिक होता है उतनी ही शीघ्रता से वह ऊष्मा चालन करता है। K का SI मात्रक $J\ s^{-1}\ m^{-1}\ K^{-1}$ अथवा $W\ m^{-1}\ K^{-1}$ है। सारणी 10.6 में विभिन्न पदार्थों की ऊष्मा चालकता के मान दिए गए हैं। इन मानों में ताप के साथ अल्प अंतर होता है, परन्तु सामान्य ताप परिसर में इन मानों को अचर मान सकते हैं।

अच्छे ऊष्मा चालकों (धातुओं) की अपेक्षाकृत अधिक ऊष्मा चालकताओं की तुलना कुछ अच्छे ऊष्मारोधी पदार्थों, जैसे लकड़ी तथा काँच तंतु, की अपेक्षाकृत कम ऊष्मा चालकताओं से कीजिए। आपने यह पाया होगा कि खाना पकाने के कुछ बर्तनों की पेंदी पर ताँबे का विलेपन होता है। ऊष्मा का अच्छा चालक होने के कारण ताँबा बर्तन की पेंदी पर ऊष्मा वितरण को उन्नत करता है जिससे भोजन समान रूप से पकता है। इसके विपरीत, प्लास्टिक फेन, मुख्यतः वायु की कोटरिका होने के कारण, अच्छे ऊष्मारोधी होते हैं। याद कीजिए गैसें अल्प चालक होती हैं तथा सारणी 10.6 से वायु की निम्न ऊष्मा चालकता नोट कीजिए। बहुत से अन्य अनुप्रयोगों में ऊष्मा धारण तथा स्थानांतरण महत्वपूर्ण होते हैं। हमारे देश में, कंक्रीट की छतों वाले घर गर्मियों में बहुत गर्म हो जाते हैं, इसका कारण यह है कि कंक्रीट की ऊष्मा चालकता (यद्यपि धातुओं की तुलना काफी कम है।) फिर भी बहुत कम नहीं है। इसीलिए, प्रायः लोग छतों पर फोन-रोधन कराना पसंद करते हैं ताकि ऊष्मा स्थानांतरण को रोककर कमरे को शीतल रखा जा सके। कुछ स्थितियों में ऊष्मा स्थानांतरण क्रांतिक होता है। उदाहरण के लिए नाभिकीय रिएक्टरों में सुविस्तृत ऊष्मा-स्थानांतर निकायों को स्थापित करने की आवश्यकता होती है ताकि नाभिकीय रिएक्टर के क्रोड में नाभिकीय विखंडन द्वारा उत्पन्न विशाल ऊर्जा का काफी तेज़ी से बाहर पारगमन किया जा सके तथा क्रोड अतितप्त होने से बचा रहे।

सारणी 10.6 कुछ पदार्थों की ऊष्मा चालकताएँ

पदार्थ	ऊष्मा चालकता ($J\ s^{-1}\ m^{-1}\ K^{-1}$)
धातुएँ	
चाँदी	406
ताँबा	385
ऐलुमिनियम	205
पीतल	109
स्टील	50.2
लैड	34.7
पारा	8.3
अधातुएँ	
ऊष्मारोधी ईंट	0.15
कंक्रीट	0.8
शरीर-वसा	0.20
नमदा	0.04
काँच	0.8
हिम	1.6
काँच तंतु	0.04
लकड़ी	0.12
जल	0.8
गैसें	
वायु	0.024
ऑर्गन	0.016
हाइड्रोजन	0.14

▶ *उदाहरण 10.6* चित्र 10.15 में दर्शाए गए निकाय की स्थायी अवस्था में स्टील-ताँबा संधि का ताप क्या है? स्टील छड़ की लंबाई = 15.0 cm, ताँबे की छड़ की लंबाई = 10.0 cm, भट्ठी का ताप = 300°C, दूसरे सिरे का ताप = 0°C; स्टील की छड़ की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल ताँबे की छड़ की अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल का दो गुना है। (स्टील की ऊष्मा चालकता = 50.2 J $s^{-1}\ m^{-1}\ K^{-1}$; ताँबे की ऊष्मा चालकता = 385 J $s^{-1} m^{-1} K^{-1}$)



चित्र 10.15

हल : छड़ों को चारों ओर से घेरे रखने वाले ऊष्मारोधी पदार्थ छड़ों के पार्श्व से होने वाली ऊष्मा क्षति को कम कर देते हैं। इसीलिए, ऊष्मा केवल छड़ की लंबाई के अनुदिश ही प्रवाहित होती है। छड़ की किसी भी अनुप्रस्थ काट पर विचार कीजिए। स्थायी अवस्था में छड़ के किसी अवयव में प्रवेश करने वाली ऊष्मा उससे बाहर निष्कासित होने वाली ऊष्मा के बराबर होनी चाहिए, वरना अवयव द्वारा ऊष्मा की नेट लब्धि अथवा हानि होगी तथा इसका ताप स्थायी नहीं रहेगा। इस प्रकार स्थायी अवस्था में छड़ की किसी अनुप्रस्थ काट से प्रवाहित होने वाली ऊष्मा की दर संयुक्त स्टील-ताँबा छड़ की लंबाई के अनुदिश सभी बिंदुओं पर समान है। मान लीजिए स्टील-ताँबा संधि का स्थायी अवस्था में ताप T है, तब

$$\frac{K_1 A_1 (300 - T)}{L_1} = \frac{K_2 A_2 (T - 0)}{L_2}$$

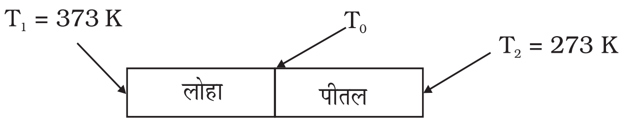
यहाँ, 1 तथा 2 क्रमशः स्टील तथा ताँबे को संदर्भित करते हैं। $A_1 = 2A_2$, $L_1 = 15.0$ cm, $L_2 = 10.0$ cm, $K_1 = 50.2$ J s^{-1} m^{-1} K^{-1}, $K_2 = 385$ J s^{-1} m^{-1} K^{-1}, के लिए

$$\frac{50.2 \times 2\,(300 - T)}{15} = \frac{385T}{10}$$

अर्थात् $T = 44.4$ °C ◀

▶ *उदाहरण 10.7* चित्र 10.16 में दर्शाए अनुसार लोहे की किसी छड़ ($L_1 = 0.1$m, $A_1 = 0.02$ m², $K_1 = 79$ W $m^{-1} K^{-1}$) को किसी पीतल की छड़ ($L_2 = 0.1$m, $A_2 = 0.02$ m², $K_2 = 109$ W $m^{-1} K^{-1}$) के साथ सिरे से सिरे को मिलाकर डाला गया है। लोहे की छड़ तथा पीतल की छड़ के स्वतंत्र सिरों को क्रमशः 373 K तथा 273 K पर स्थापित किया गया है। (i) दोनों छड़ों की संधि पर ताप, (ii) संयुक्त छड़ की तुल्य ऊष्मा चालकता, तथा (iii) संयुक्त छड़ में ऊष्मा प्रवाह की दर के लिए व्यंजक निकालिए तथा परिकलित कीजिए।

हल



चित्र 10.16

दिया गया है,

$L_1 = L_2 = L = 0.1\text{m}, A_1 = A_2 = A = 0.02 \text{ m}^2$

$K_1 = 79 \text{ W m}^{-1} \text{K}^{-1}, K_2 = 109 \text{ W m}^{-1} \text{K}^{-1},$

$T_1 = 373$ K, और $T_2 = 273$ K

स्थायी अवस्था की शर्तों के अधीन, लोहे की छड़ से ऊष्मा प्रवाह की दर (H_1) ताँबे की छड़ से ऊष्मा प्रवाह की दर (H_2) के समान है।

अतः, $H = H_1 = H_2$

$$= \frac{K_1 A_1 (T_1 - T_0)}{L_1} = \frac{K_2 A_2 (T_0 - T_2)}{L_2}$$

चूंकि $A_1 = A_2 = A$ तथा $L_1 = L_2 = L$

अतः उपरोक्त समीकरण होगा

$K_1 (T_1 - T_0) = K_2 (T_0 - T_2)$

अतः दोनों छड़ों की संधि का ताप T_0 होगा

$$T_0 = \frac{K_1 T_1 + K_2 T_2}{K_1 + K_2}$$

T_0 के इस मान का प्रतिस्थापन करने से किसी भी छड़ से ऊष्मा प्रवाह की दर H का मान प्राप्त होता है:

$$H = \frac{K_1 A (T_1 - T_0)}{L} = \frac{K_2 A (T_0 - T_2)}{L}$$

$$= \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \frac{A(T_1 - T_0)}{L} = \frac{A(T_1 - T_2)}{L\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right)}$$

यदि लंबाई $L_1 + L_2 = 2L$ की संयुक्त छड़ की तुल्य ऊष्मा चालकता K है तथा इससे होकर जाने वाली ऊष्मा प्रवाह की दर H′ हो, तो उपरोक्त समीकरण का उपयोग करने पर

$$H' = \frac{K'A(T_1 - T_2)}{2L} = H$$

तथा $$K' = \frac{2K_1 K_2}{K_1 + K_2}$$

इस प्रकार,

(i) $$T_O = \frac{K_1 T_1 + K_2 T_2}{K_1 + K_2}$$

$$= \frac{\left(79 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}\right)(373\text{K}) + \left(109 \text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}\right)(273\text{K})}{79 \text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1} + 109 \text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}}$$

$= 315$ K

(ii) $$K' = \frac{2K_1 K_2}{K_1 + K_2}$$

$$= \frac{2 \times (79 \text{ W m}^{-1} \text{K}^{-1}) \times (109 \text{ W m}^{-1} \text{K}^{-1})}{79 \text{ W m}^{-1} \text{K}^{-1} + 109 \text{ W m}^{-1} \text{K}^{-1}}$$

$= 91.6 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$

(iii) $$H' = H = \frac{K'A(T_1 - T_2)}{2L}$$

$$= \frac{(91.6 \text{ W m}^{-1} \text{K}^{-1}) \times (0.02 \text{ m}^2) \times (373\text{K} - 273\text{K})}{2 \times (0.1 \text{ m})}$$

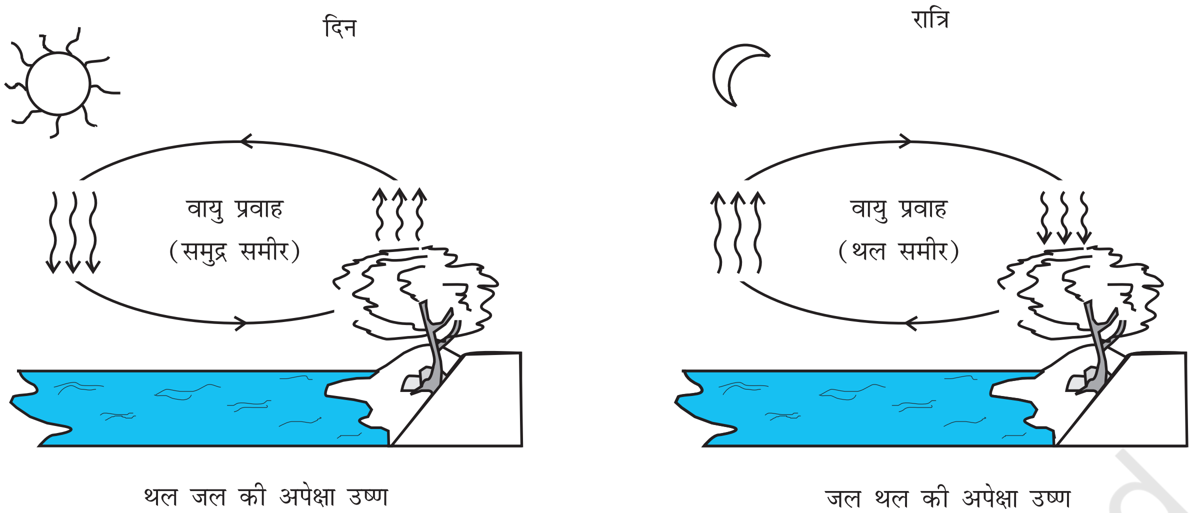
$= 916.1$ W ◀

10.9.2 संवहन

संवहन वह विधि है जिसमें पदार्थ की वास्तविक गति द्वारा ऊष्मा स्थानांतरण होता है। यह केवल तरलों में ही संभव है। संवहन प्राकृतिक हो सकता है अथवा प्रणोदित भी हो सकता है। प्राकृतिक संवहन में गुरुत्व एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाती है। जब किसी तरल को नीचे से गर्म किया जाता है, तो गर्म भाग में प्रसार होता है, फलस्वरूप उसका घनत्व घट जाता है। उत्प्लावना के कारण यह ऊपर उठता है तथा ऊपरी शीतल भाग इसे प्रतिस्थापित कर देता है। यह पुनः तप्त होता है, ऊपर उठता है तथा तरल के अपेक्षाकृत शीतल भाग द्वारा प्रतिस्थापित होता है। यह प्रक्रिया चलती रहती है। स्पष्ट रूप से ऊष्मा स्थानांतर की यह विधि चालन से भिन्न होती है। संवहन में तरल के विभिन्न भागों का स्थूल अभिगमन होता है।

प्रणोदित संवहन में पदार्थ को किसी पम्प अथवा किसी अन्य भौतिक साधन द्वारा गति करने के लिए विवश किया जाता है। घरों में प्रणोदित वायु तापन निकाय, मानव परिसंचरण तंत्र तथा स्वचालित वाहनों के इंजनों के शीतलन निकाय प्रणोदित संवहन निकायों के सामान्य उदाहरण हैं। मानव शरीर में हृदय एक पम्प की भांति कार्य करता है जो रुधिर का शरीर के विभिन्न भागों में संचरण करता है, तथा इस प्रकार प्रणोदित संवहन द्वारा ऊष्मा स्थानांतरित करके शरीर में एकसमान ताप स्थापित करता है।

प्राकृतिक संवहन बहुत सी सुपरिचित परिघटनाओं के लिए उत्तरदायी है। दिन के समय बड़े जलाशयों की तुलना में थल शीघ्र तप्त हो जाता है। ऐसा दो कारणों से होता है – पहला जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता उच्च है तथा दूसरा मिश्रित धाराएँ अवशोषित ऊष्मा को विशाल आयतन के जल के सब भागों में विसारित कर देती हैं। तप्त थल के संपर्क वाली वायु चालन



चित्र 10.17 संवहन चक्र।

द्वारा गर्म होती है तथा तप्त होकर वायु फैलती है, जिससे परिवेश की शीतल वायु की तुलना में इसका घनत्व कम हो जाता है। फलस्वरूप उष्ण वायु ऊपर उठती है (वायु धाराएँ), तथा रिक्त स्थान को भरने के लिए अन्य वायु गति करती हैं (पवनें) - जिससे बड़े जलाशयों के निकट **समुद्र समीर** उत्पन्न हो जाती हैं। ठंडी वायु नीचे आती हैं तथा एक तापीय संवहन चक्र बन जाता है, जो ऊष्मा को थल से दूर स्थानांतरित कर देता है। रात्रि में थल की ऊष्मा का ह्रास अधिक शीघ्रता से होता है तथा जलीय पृष्ठ थल की तुलना में उष्ण होती है। परिणामस्वरूप चक्र उत्क्रमित हो जाता है (चित्र 10.17)।

प्राकृतिक संवहन का एक अन्य उदाहरण उत्तर पूर्व से विषुवत् वृत्त की ओर पृथ्वी पर बहने वाली स्थायी पृष्ठीय पवनें हैं, जिन्हें व्यापारिक पवनें कहते हैं। इनके बहने की यथोचित व्याख्या इस प्रकार है : पृथ्वी के विषुवतीय क्षेत्रों तथा ध्रुवीय क्षेत्रों को सूर्य की ऊष्मा समान मात्रा में प्राप्त नहीं होती। विषुवत वृत्त के समीप पृथ्वी के पृष्ठ पर वायु तप्त होती है जबकि ध्रुवों के ऊपरी वायुमण्डलीय वायु शीतल होती है। किसी अन्य कारक की अनुपस्थिति में, संवहन धाराएँ प्रवाहित होने लगेंगी जिसमें वायु विषुवतीय पृष्ठ से ऊपर उठकर ध्रुवों की ओर बहेगी, फिर नीचे की ओर जाएगी तथा बहती हुई पुनः विषुवत वृत्त की ओर जाएगी। परन्तु, पृथ्वी की घूर्णन गति इस संवहन धारा में संशोधन कर देती है जिसके कारण विषुवत वृत्त के समीप की वायु की पूर्व की ओर चाल 1600 km/h होती है जबकि ध्रुवों के समीप यह चाल शून्य होती है। परिणामस्वरूप यह वायु ध्रुवों पर नीचे की ओर न फैलकर 30°N (उत्तर) अक्षांश पर फैलती है और विषुवत वृत्त पर लौट आती है। इसे **व्यापारिक पवनें** कहते हैं।

10.9.3 विकिरण

चालन तथा संवहन को परिवहन माध्यम के रूप में किसी पदार्थ की आवश्यकता होती है। ऊष्मा स्थानांतरण की ये विधियाँ निर्वात से पृथक दो वस्तुओं के बीच क्रियाशील नहीं हो सकतीं। परन्तु विशाल दूरी होने पर भी पृथ्वी सूर्य से ऊष्मा प्राप्त कर लेती है। इसी प्रकार, हम पास की आग की उष्णता शीघ्र ही अनुभव कर लेते हैं, यद्यपि वायु अल्प चालक है तथा इतने कम समय में संवहन धाराएँ भी स्थापित नहीं हो पातीं। ऊष्मा स्थानांतरण की तीसरी विधि को किसी माध्यम की आवश्यकता नहीं होती। इस विधि को **विकिरण** कहते हैं, तथा विद्युत चुंबकीय तरंगों द्वारा इस प्रकार विकरित ऊर्जा को **विकिरण ऊर्जा** कहते हैं। किसी विद्युत चुंबकीय तरंग में वैद्युत तथा चुंबकीय क्षेत्र दिक तथा काल में दोलन करते हैं। अन्य किसी तरंग की भांति विद्युत चुंबकीय तरंगों की विभिन्न तरंगदैर्घ्य हो सकती हैं तथा वे निर्वात में समान चाल, जिसे प्रकाश की चाल कहते हैं अर्थात् 3×10^8 m s^{-1} से चल सकती हैं। इन तथ्यों के बारे में विस्तार से आप बाद में फिर कभी सीखेंगे, परन्तु अब आप यह जान गए हैं कि विकिरण द्वारा ऊष्मा स्थानांतरण के लिए माध्यम का होना क्यों आवश्यक नहीं है तथा यह इतनी तीव्र गति से क्यों होता है। विकिरण द्वारा ही सूर्य से ऊष्मा निर्वात (शून्य अंतरिक्ष) से होकर पृथ्वी तक पहुँचती है। सभी तप्त पिण्ड चाहे वे ठोस, द्रव अथवा गैस हों, विकिरण ऊर्जा उत्सर्जित करते हैं। किसी पिण्ड द्वारा उसके ताप के कारण उत्सर्जित विद्युत चुंबकीय विकिरणों जैसे लाल तप्त लोहा से विकिरण अथवा तंतु लैम्प से प्रकाश को **ऊष्मा विकिरण** कहते हैं।

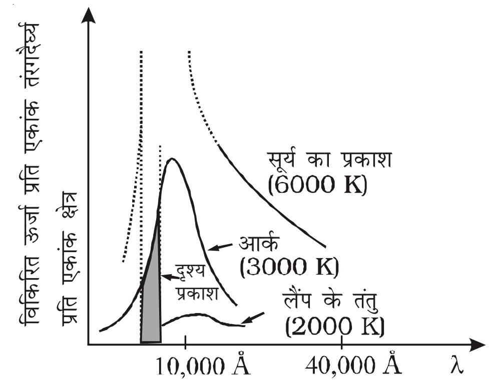
जब यह ऊष्मा विकिरण अन्य पिण्डों पर पड़ता है तो इसका आंशिक परावर्तन तथा आंशिक अवशोषण होता है। ऊष्मा का वह परिमाण जिसे कोई पिण्ड विकिरण द्वारा अवशोषित कर सकता है, उस पिण्ड के वर्ण (रंग) पर निर्भर करता है।

हम यह पाते हैं कि कृष्ण पिण्ड विकिरण ऊर्जा का अवशोषण तथा उत्सर्जन हलके वर्णों के पिण्डों की अपेक्षा अधिक करते हैं। इस तथ्य के हमारे दैनिक जीवन में अनेक अनुप्रयोग हैं। हम गर्मियों में श्वेत अथवा हलके वर्णों के वस्त्र पहनते हैं ताकि वे सूर्य की कम से कम ऊष्मा अवशोषित करें। परन्तु सर्दियों में हम गहरे वर्ण के वस्त्र पहनते हैं जो सूर्य की अधिक ऊष्मा को अवशोषित करके हमें उष्ण रखते हैं। खाना पकाने के बर्तनों की पेंदी को काला पोत दिया जाता है ताकि आग से वह अधिकतम ऊष्मा अवशोषित करके पकाई जाने वाली सब्जी को दें।

इसी प्रकार, ड्यूआर फ्लास्क अथवा थर्मस बोतल एक ऐसी युक्ति है जो बोतल की अंतर्वस्तु तथा बाहरी परिवेश के बीच ऊष्मा स्थानांतरण को निम्नतम कर देती है। यह दोहरी दीवारों का काँच का बर्तन होता है जिसकी भीतरी तथा बाहरी दीवारों पर चाँदी का लेप होता है। भीतरी दीवार से विकिरण परावर्तित होकर बोतल की अंतर्वस्तु में वापस लौट जाते हैं। इसी प्रकार बाहरी दीवार भी बाहर से आने वाले किन्हीं भी विकिरणों को वापस परावर्तित कर देती है। दीवारों के बीच के स्थान को निर्वातित करके चालन तथा संवहन द्वारा होने वाले ऊष्मा क्षय को घटाया जाता है तथा फ्लास्क को ऊष्मा रोधी जैसे कार्क पर टिकाया जाता है। इसीलिए यह युक्ति तप्त अंतर्वस्तु (जैसे दूध) को ठंडा होने से बचाने में उपयोगी है, अथवा वैकल्पिक रूप से ठंडी अंतर्वस्तुओं (जैसे हिम) का भंडारण करने में भी उपयोगी है।

10.9.4 कृष्णिका विकिरण

अब तक हमने उष्मा विकिरण के तरंगदैर्घ्य के पक्ष का उल्लेख नहीं किया है। किसी ताप पर उष्मा विकिरण के विषय में महत्त्वपूर्ण बात यह है कि विकिरण में मात्र एक ही (या कतिपय) तरंगदैर्घ्य नहीं होते हैं, बल्कि इसमें कम तरंगदैर्घ्य से लेकर अधिक तरंगदैर्घ्य के बीच उसका सतत् स्पैक्ट्रम होता है। तथापि विभिन्न तरंगदैर्घ्यों के लिए विकिरित उष्मा की ऊर्जा की मात्रा भिन्न-भिन्न होती है। चित्र 10.18 विभिन्न तापों पर किसी कृष्णिका के एकांक क्षेत्र द्वारा एकांक तरंगदैर्घ्य पर उत्सर्जित विकिरित ऊर्जा तथा तरंगदैर्घ्य के मध्य प्रायोगिक वक्र दर्शाता है।



चित्र 10.18: कृष्णिका द्वारा विभिन्न तापों पर उत्सर्जित ऊर्जा तथा तरंगदैर्घ्य के मध्य खींचे गए वक्र।

इस बात पर गौर कीजिए कि तरंगदैर्घ्य λ_m जिसके लिए विकिरित ऊर्जा सर्वाधिक है, ताप बढ़ने पर घटती है। λ_m तथा T के मध्य संबंध को **वीन-विस्थापन नियम** कहते हैं–

$$\lambda_m T = \text{नियतांक} \tag{10.15}$$

नियतांक (वीन नियतांक) का मान 2.9×10^{-3} m K होता है। यह नियम इस बात की व्याख्या करता है कि जब लोहे के किसी टुकड़े को अग्नि में गर्म करते हैं, तो उसका रंग पहले हलका लाल, फिर रक्ताभ पीला और अंत में सफेद क्यों हो जाता है। वीन-नियम का उपयोग खगोलीय पिंडों, जैसे- चाँद, सूर्य या अन्य तारों की सतह के ताप का अनुमान लगाने में करते हैं। चंद्रमा से प्रकाश की सबसे अधिक तीव्रता 14 μm तरंगदैर्घ्य के आसपास होती है। वीन-नियम से चन्द्रमा की सतह का ताप 200 K अनुमानित किया गया है। सौर विकिरण की अधिकतम तीव्रता λ_m = 4753 Å पर होती है। इसके अनुसार T = 6060 K । याद रखिए कि यह ताप सूर्य की सतह का है न कि उसके आंतरिक (भीतरी) भाग का।

चित्र 10.18 में दर्शाए गए कृष्णिका विकिरण वक्रों से संबंधित सर्वाधिक विशिष्ट बात यह है कि ये वक्र *सार्वत्रिक* होते हैं। ये कृष्णिका के केवल ताप पर निर्भर करते हैं न कि उसके आकार, आकृति या पदार्थ पर। बीसवीं शताब्दी के प्रारंभ में कृष्णिका के विकिरण को सैद्धांतिक रूप से व्याख्या करने के लिए जो प्रयास किए गए उन्होंने भौतिकी में क्वांटम क्रांति की प्रेरणा दी। इसके विषय में आप आगे अपने पाठ्यक्रम में पढ़ेंगे।

विकिरण द्वारा ऊर्जा बिना माध्यम के (अर्थात् निर्वात में) बहुत दूरियों तक स्थानान्तरित की जा सकती है। परम ताप T पर

किसी वस्तु द्वारा उत्सर्जित कुल विद्युत चुम्बकीय ऊर्जा उसके आकार, उसकी उत्सर्जित करने की क्षमता (जिसे उत्सर्जकता कहते हैं) और विशेष रूप से उसके ताप के समानुपाती होती है। एक वस्तु के लिए जो पूर्ण उत्सर्जक है, प्रति इकाई समय में उत्सर्जित ऊर्जा (H) होगी–

$$H = A\sigma T^4 \qquad (10.16)$$

जहाँ A वस्तु का क्षेत्रफल है तथा T उसका परमताप है। इस सम्बन्ध को पहले स्टेफॉन ने प्रयोगों से निकाला तथा बाद में बोल्ट्समान ने सैद्धांतिक रूप से सिद्ध किया। इसे **स्टेफॉन बोल्ट्समान नियम** तथा नियतांक σ को स्टेफॉन–बोल्टसमान नियतांक कहते हैं। SI मात्रक पद्धति में इसका मान $5.67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$ होता है। अधिकतर वस्तुएँ समीकरण (A2) में दी गई उष्मा की दर का कुछ अंश ही उत्सर्जित करती हैं। दीप कज्जल जैसे पदार्थों द्वारा उत्सर्जित उष्मा की दर ही इस सीमा के करीब होती है। इस कारण 'एक' विमाहीन अंश e जिसे वस्तु की **उत्सर्जकता** कहते हैं, को परिभाषित करते हैं और समीकरण (10.16) को निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं—

$$H = Ae\sigma T^4 \qquad (10.17)$$

किसी आदर्श विकिरक के लिए $e = 1$ होता है। उदाहरण के तौर पर टंगस्टन लैम्प के लिए e का मान लगभग 0.4 होता है। इस तरह 0.3 $\mathrm{cm^2}$ पृष्ठ क्षेत्रफल तथा 3000K ताप वाला टंगस्टन लैम्प निम्नलिखित दर से उष्मा विकिरित करेगा–

$$H = 0.3 \times 10^{-4} \times 0.4 \times 5.67 \times 10^{-8}\,(3000)^4 = 60\,\mathrm{W}$$

T ताप वाली कोई वस्तु जिसके चारों ओर के वातावरण का ताप T_S है, ऊर्जा का अवशोषण तथा उत्सर्जन दोनों करती है। अत: किसी आदर्श विकिरक से विकिरित उष्मा के क्षय (हानि) की नेट दर निम्नलिखित सूत्र से व्यक्त की जाएगी –

$$H = \sigma A\,(T^4 - T_s^4)$$

उस वस्तु के लिए जिसकी उत्सर्जकता e है, उपरोक्त सूत्र निम्न प्रकार से रूपांतरित हो जाएगा –

$$H = e\sigma A\,(T^4 - T_s^4) \qquad (10.18)$$

उदाहरणार्थ, आइए, हम अपने शरीर से उत्सर्जित उष्मा की गणना करें। मान लीजिए किसी व्यक्ति के शरीर का पृष्ठ क्षेत्रफल लगभग 1.9 $\mathrm{m^2}$ है तथा कमरे का ताप 22°C है। जैसाकि हम जानते हैं, शरीर का आंतरिक ताप 37°C होता है। माना, त्वचा का ताप 20°C है। प्रासंगिक विद्युत चुम्बकीय विकिरण क्षेत्र में त्वचा की उत्सर्जकता 'e' लगभग 0.97 है। इस उदाहरण से उष्मा हानि की दर–

$$\begin{aligned} H &= 5.67 \times 10^{-8} \times 1.9 \times 0.97 \times \{(301)^4 - (295)^4\} \\ &= 66.4\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

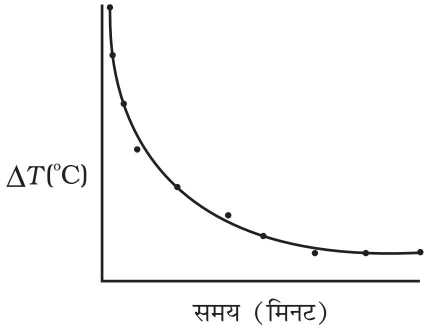
जो विराम अवस्था में शरीर द्वारा उत्पन्न ऊर्जा की दर (120 W) के आधे से थोड़ा अधिक है। उष्मा के इस क्षय को कारगर तरीके से रोकने के लिए आधुनिक आर्कटिक कपड़े (आम कपड़ों से अच्छे) इस प्रकार बनाए जाते हैं कि शरीर की त्वचा के साथ एक अतिरिक्त पतली चमकदार धातुई परत होती है, जो शरीर के विकिरण को परावर्तित कर देती है।

10.10 न्यूटन का शीतलन नियम

हम सभी यह जानते हैं कि तप्त जल अथवा दूध मेज पर यदि रखा छोड़ दें तो वह धीरे–धीरे शीतल होना आरंभ कर देता है। अंतत: वह परिवेश के ताप पर पहुँच जाता है। कोई दी गई वस्तु अपने परिवेश से ऊष्मा का विनिमय करके कैसे शीतल हो सकती है, इसका अध्ययन करने के लिए आइए निम्नलिखित क्रियाकलाप करें।

क्रियाकलाप 10.4

एक विडोलक सहित ऊष्मामापी में कुछ जल, मान लें 300 mL लीजिए और इसे दो छिद्र वाले ढक्कन से ढक दीजिए। ढक्कन के एक छिद्र में विडोलक तथा दूसरे छिद्र में तापमापी लगाइए तथा यह सुनिश्चित कीजिए कि तापमापी का बल्ब जल में डूब जाए। तापमापी का पाठ्यांक नोट कीजिए। यह पाठ्यांक T_1 परिवेश का ताप है। ऊष्मामापी के जल को इतना गर्म कीजिए कि इसका ताप कक्ष ताप (अर्थात् परिवेश के ताप) से लगभग 40 °C अधिक तक पहुँच जाए। तत्पश्चात् ऊष्मा स्रोत को हटाकर जल को गर्म करना बंद कीजिए। विराम घड़ी चलाइए तथा प्रत्येक नियत समय अंतराल जैसे 1 मिनट के पश्चात् विडोलक से धीरे–धीरे विडोलित करते हुए तापमापी के पाठ्यांक नोट कीजिए। जल का ताप परिवेश के ताप से लगभग 5 °C अधिक रहने तक पाठ्यांक नोट करते रहिए। मान लीजिए यह पाठ्यांक (T_2) है। तत्पश्चात् ताप $\Delta T = T_2 - T_1$ को y-अक्ष के अनुदिश लेकर इसके प्रत्येक मान के लिए तदनुरूपी t के मान को x-अक्ष के अनुदिश लेकर ग्राफ आलेखित करिए (चित्र 10.19)।



चित्र 10.19 समय के साथ तप्त जल के शीतलन को दर्शाने वाला वक्र।

ग्राफ से आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि किस प्रकार तप्त जल का शीतलन उसके अपने तथा अपने परिवेश के तापों के बीच अंतर पर निर्भर करता है। आप यह भी नोट करेंगे कि आरंभ में शीतलन की दर उच्च है तथा वस्तु के ताप में कमी होने पर यह दर घट जाती है।

उपरोक्त क्रियाकलाप यह दर्शाता है कि कोई तप्त पिण्ड ऊष्मा विकिरण के रूप में अपने परिवेश को ऊष्मा खो देता है। यह ऊष्मा-क्षय की दर पिण्ड तथा उसके परिवेश के तापों के अंतर पर निर्भर करती है। न्यूटन ऐसे पहले वैज्ञानिक थे जिन्होंने किसी दिए गए अंतःक्षेत्र के भीतर रखे किसी पिण्ड द्वारा लुप्त ऊष्मा तथा उसके ताप के बीच संबंध का योजनाबद्ध अध्ययन किया।

न्यूटन के शीतलन नियम के अनुसार किसी पिण्ड के ऊष्मा क्षय की दर, $-\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ पिण्ड तथा उसके परिवेश के तापों के अंतर $\Delta T = (T_2 - T_1)$ के अनुक्रमानुपाती होती है। यह नियम केवल लघु तापांतर के लिए ही वैध है। विकिरण द्वारा ऊष्मा-क्षय पिण्ड के पृष्ठ की प्रकृति तथा खुले पृष्ठ के क्षेत्रफल पर भी निर्भर करता है। अतः हम लिख सकते हैं कि

$$-\frac{dQ}{dt} = k(T_2 - T_1) \qquad (10.19)$$

यहाँ k एक धनात्मक नियतांक है जो पिण्ड के पृष्ठ के क्षेत्रफल तथा उसकी प्रकृति पर निर्भर करता है। मान लीजिए m द्रव्यमान तथा विशिष्ट ऊष्मा धारिता s का कोई पिण्ड T_2 ताप पर है। मान लीजिए परिवेश का ताप T_1 है। मान लीजिए पिण्ड का ताप एक लघु समय अंतराल dt में dT_2 कम हो जाता है, तब लुप्त ऊष्मा का परिमाण

$dQ = ms\, dT_2$

$\therefore$ ऊष्मा क्षय की दर

$$\frac{dQ}{dt} = ms\frac{dT_2}{dt} \qquad (10.20)$$

समीकरणों (10.15) तथा (10.16) से हमें प्राप्त होता है

$$-ms\frac{dT_2}{dt} = k(T_2 - T_1)$$

$$\frac{dT_2}{T_2 - T_1} = -\frac{k}{ms}dt = -K\,dt \qquad (10.21)$$

यहाँ $K = k/(ms)$

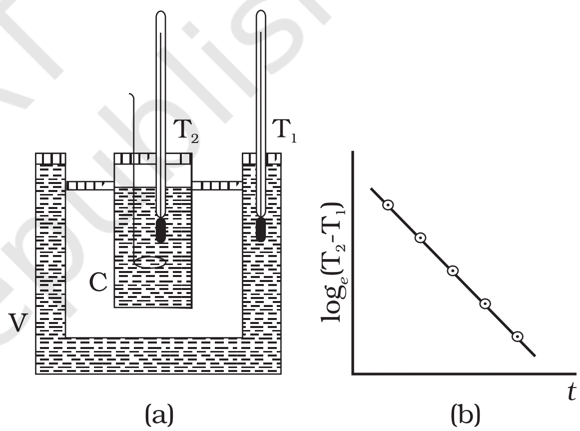
समाकलित करने पर

$$\log_e (T_2 - T_1) = -Kt + c \qquad (10.22)$$

अथवा $T_2 = T_1 + C'\,e^{-Kt}$; यहाँ $C' = e^c$ (10.23)

समीकरण (10.23) की सहायता से एक विशिष्ट ताप परिसर के आद्योपांत शीतलन का समय परिकलित किया जा सकता है।

लघु तापांतरों के लिए, चालन, संवहन तथा विकिरण के संयुक्त प्रभाव के कारण शीतलन की दर तापांतर के अनुक्रमानुपाती होती है। किसी विकिरक से कमरे में ऊष्मा स्थानांतरण, कमरे की दीवारों से पार होकर ऊष्मा-क्षति अथवा मेज पर प्याले में रखी चाय के शीतलन में यह एक वैध सन्निकटन है।



चित्र 10.20 न्यूटन के शीतलन नियम का सत्यापन।

चित्र 10.20(a) में दर्शायी गई प्रायोगिक व्यवस्था की सहायता से न्यूटन के शीतलन नियम का सत्यापन किया जा सकता है। इसमें दोहरी दीवारों वाला एक बर्तन (V) जिसकी दीवारों के बीच जल भरा होता है, लिया जाता है। इस दोहरी दीवारों वाले बर्तन में तप्त जल से भरा ताँबे का ऊष्मामापी (C) रखते हैं। इसमें दो तापमापियों का उपयोग किया जाता है, जिसमें तापमापी T_1 के द्वारा दोहरी दीवारों के बीच भरे उष्ण जल का ताप, तथा तापमापी T_2 के द्वारा ऊष्मामापी में भरे जल का ताप मापते हैं। ऊष्मामापी के तप्त जल का ताप एक नियमित अंतराल के पश्चात् मापा जाता है। समय t तथा $\log_e (T_2 - T_1)$ [या $\ln (T_2 - T_1)$] के बीच ग्राफ आलेखित किया जाता है जिसकी प्रकृति चित्र 10.19(b) में दर्शाए अनुसार ऋणात्मक प्रवणता की एक सरल रेखा होती है। यह समीकरण 10.22 की पुष्टि करती है।

उदाहरण 10.8 किसी बर्तन में भरे तप्त भोजन का ताप 2 मिनट में 94 °C से 86 °C हो जाता है जबकि कक्ष-ताप 20 °C है। 71 °C से 69 °C तक ताप के गिरने में कितना समय लगेगा?

हल : 94 °C तथा 86 °C का माध्य 90 °C है जो कक्ष-ताप से 70 °C अधिक है। इन अवस्थाओं में बर्तन का ताप 2 मिनट में 8 °C घट जाता है।

अतः, समीकरण (10.21) से,

$$\frac{\text{तापांतर}}{\text{समय}} = K\Delta T$$

$$\frac{8°C}{2\ \text{मिनट}} = K\,(70°C)$$

69 °C तथा 71°C का माध्य 70 °C है, जो कक्ष-ताप से 50 °C अधिक है। इस अवस्था में K मूल अवस्था के समान है, अतः

$$\frac{2°C}{\text{समय}} = K\,(50°C)$$

दोनों समीकरणों को विभाजित करने पर

$$\frac{8°C/2\ \text{मिनट}}{2°C/\text{समय}} = \frac{K(70°C)}{K(50°C)}$$

समय = 0.7 min. = 42 s

सारांश

1. ऊष्मा ऊर्जा का एक रूप है जो किसी पिण्ड तथा उसके परिवर्ती माध्यम के बीच उनमें तापांतर के कारण प्रवाहित होती है। किसी पिण्ड की तप्तता की कोटि मात्रात्मक रूप में ताप द्वारा निरूपित होती है।

2. किसी ताप मापन युक्ति (तापमापी) में मापन योग्य किसी ऐसे गुण (जिसे तापमापीय गुण कहते हैं) का उपयोग किया जाता है, जिसमें ताप के साथ परिवर्तन होता है। विभिन्न तापमापी में भिन्न-भिन्न ताप मापक्रम बनते हैं। कोई ताप मापक्रम बनाने के लिए दो नियत बिंदुओं का चयन किया जाता है तथा उन्हें कुछ यादृच्छिक ताप मान दिए जाते हैं। ये दो संख्याएँ मापक्रम के मूल बिंदु तथा उसके मात्रक की आमाप को निश्चित करती हैं।

3. सेल्सियस ताप (t_C) तथा फारेनहाइट ताप (t_F) में यह संबंध होता है : $t_F = (9/5)\ t_C + 32$

4. दाब (P), आयतन (V) तथा परम ताप (T) में संबंध दर्शाने वाली आदर्श गैस समीकरण इस प्रकार व्यक्त की जाती है:

$$PV = \mu RT$$

यहाँ μ मोल की संख्या तथा R सार्वत्रिक गैस नियतांक है।

5. परम ताप मापक्रम में, मापक्रम का शून्य, ताप के परम शून्य को व्यक्त करता है। यह वह ताप है जिस पर प्रत्येक पदार्थ में न्यूनतम संभावित आण्विक सक्रियता होती है। केल्विन परम ताप मापक्रम (T) के मात्रक का आकार सेल्सियस ताप मापक्रम (t_c) के मात्रक के आकार के बराबर होता है परन्तु इनके मूल बिंदुओं में अंतर होता है:

$$t_C = T - 273.15$$

6. रैखिक प्रसार गुणांक (α_l) तथा आयतन प्रसार गुणांक (α_V) को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है:

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha_l \Delta T$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \alpha_V \Delta T$$

यहाँ Δl तथा ΔV ताप में ΔT का परिवर्तन होने पर क्रमशः लंबाई l तथा आयतन V में परिवर्तन को निर्दिष्ट करते हैं। इनमें निम्नलिखित संबंध है:

$$\alpha_V = 3\ \alpha_l$$

7. किसी पदार्थ की विशिष्ट ऊष्मा धारिता को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है:

$$s = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

यहाँ m पदार्थ का द्रव्यमान तथा ΔQ पदार्थ के ताप में ΔT का परिवर्तन करने के लिए आवश्यक ऊर्जा की मात्रा है। किसी पदार्थ की मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है:

$$C = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

यहाँ μ पदार्थ के मोल की संख्या है।

8. संगलन की गुप्त ऊष्मा (L_f) ऊष्मा की वह मात्रा है जो किसी पदार्थ के एकांक द्रव्यमान को समान ताप तथा दाब पर ठोस अवस्था से द्रव अवस्था में परिवर्तित करने के लिए आवश्यक होती है। वाष्पन की गुप्त ऊष्मा (L_v) ऊष्मा की वह मात्रा है जो किसी पदार्थ के एकांक द्रव्यमान को ताप व दाब में बिना कोई परिवर्तन किए द्रव अवस्था से वाष्प अवस्था में परिवर्तित करने के लिए आवश्यक होती है।

9. ऊष्मा-स्थानांतरण की तीन विधियाँ हैं – चालन, संवहन तथा विकिरण।

10. चालन में किसी पिण्ड के आस-पास के भागों के बीच ऊष्मा का स्थानांतरण आण्विक संघट्टनों द्वारा संपन्न होता है परन्तु इसमें द्रव्य का प्रवाह नहीं होता। किसी L लंबाई तथा A अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल की छड़, जिसके दोनों सिरों के तापों को T_C तथा T_D पर स्थापित किया गया है, द्वारा प्रवाहित ऊष्मा की दर

$$H = K\,A\,\frac{T_C - T_D}{L}$$

यहाँ K छड़ के पदार्थ की ऊष्मा चालकता है।

11. न्यूटन के शीतलन नियम के अनुसार किसी पिण्ड के शीतलन की दर परिवेश के ऊपर वस्तु के ताप-आधिक्य के अनुक्रमानुपाती होती है

$$\frac{dQ}{dt} = -k\,(T_2 - T_1)$$

यहाँ T_1 परिवेशी माध्यम का ताप तथा T_2 पिण्ड का ताप है।

राशि	प्रतीक	विमाएँ	मात्रक	टिप्पणी
पदार्थ की मात्रा	μ	(मोल)	मोल (mol)	
सेल्सियस ताप	t_c	[K]	°C	
केल्विन परम ताप	T	[K]	K	$t_c = T - 273.15$
रैखिक प्रसार गुणांक	α_l	[K^{-1}]	K^{-1}	
आयतन प्रसार गुणांक	α_v	[K^{-1}]	K^{-1}	$\alpha_v = 3\alpha_l$
किसी निकाय को आपूर्त ऊष्मा	ΔQ	[ML^2T^{-2}]	J	Q अवस्था चर नहीं है
विशिष्ट ऊष्मा धारिता	s	[$L^2T^{-2}K^{-1}$]	J kg^{-1} K^{-1}	
ऊष्मा चालकता	K	[$MLT^{-3}K^{-1}$]	J s^{-1} $m^{-1}K^{-1}$	$H = -KA\frac{dT}{dx}$

विचारणीय विषय

1. केल्विन ताप (T) तथा सेल्सियस ताप t_c को जोड़ने वाला संबंध इस प्रकार है:

$$T = t_c + 273.15$$

तथा जल के त्रिक बिंदु के लिए (चयन द्वारा) $T = 273.16$ K का निर्धारण यथार्थ संबंध है। इस चयन के साथ सेल्सियस मापक्रम पर हिम का गलनांक तथा जल का क्वथनांक (दोनों 1 atm दाब पर) क्रमशः 0 °C तथा 100 °C के अत्यधिक निकट हैं परन्तु यथार्थ रूप से इनके बराबर नहीं हैं। मूल सेल्सियस ताप मापक्रम में पिछले नियत बिंदु (चयन द्वारा) तथ्यतः 0 °C तथा 100 °C थे, परन्तु अब नियत बिंदुओं के चयन के लिए जल के त्रिक बिंदु को अच्छा माना जाता है क्योंकि इसका ताप अद्वितीय है।

2. जब कोई द्रव वाष्प के साथ साम्य में होता है तो समस्त निकाय का दाब तथा ताप समान होता है तथा साम्यावस्था में दोनों प्रावस्थाओं के मोलर आयतनों में अंतर (घनत्वों में अंतर) होता है। यह सभी निकायों पर लागू होता है चाहे उसमें कितनी भी प्रावस्थाएँ साम्य में हों।

3. ऊष्मा स्थानांतरण में सदैव दो निकायों अथवा एक ही निकाय के दो भागों के बीच तापांतर सम्मिलित होता है। ऐसा ऊर्जा स्थानांतरण जिसमें किसी भी रूप में तापांतर सम्मिलित नहीं होता, वह ऊष्मा नहीं है।

4. संवहन में किसी तरल के भीतर उसके भागों में असमान ताप होने के कारण द्रव्य का प्रवाह सम्मिलित होता है। किसी टोंटी से गिरते जल के नीचे रखी किसी तप्त छड़ की ऊष्मा का क्षय छड़ के पृष्ठ तथा जल के बीच चालन के कारण होता है जल के भीतर संवहन द्वारा नहीं होता।

अभ्यास

10.1 निऑन तथा CO_2 के त्रिक बिंदु क्रमशः 24.57 K तथा 216.55 K हैं। इन तापों को सेल्सियस तथा फारेनहाइट मापक्रमों में व्यक्त कीजिए।

10.2 दो परम ताप मापक्रमों A तथा B पर जल के त्रिक बिंदु को 200 A तथा 350 B द्वारा परिभाषित किया गया है। T_A तथा T_B में क्या संबंध है?

10.3 किसी तापमापी का ओम में विद्युत प्रतिरोध ताप के साथ निम्नलिखित सन्निकट नियम के अनुसार परिवर्तित होता है

$$R = R_o [1 + \alpha (T - T_o)]$$

यदि तापमापी का जल के त्रिक बिंदु 273.16 K पर प्रतिरोध 101.6 Ω तथा लैड के सामान्य संगलन बिंदु (600.5 K) पर प्रतिरोध 165.5 Ω है तो वह ताप ज्ञात कीजिए जिस पर तापमापी का प्रतिरोध 123.4 Ω है।

10.4 निम्नलिखित के उत्तर दीजिए:

(a) आधुनिक तापमिति में जल का त्रिक बिंदु एक मानक नियत बिंदु है, क्यों? हिम के गलनांक तथा जल के क्वथनांक को मानक नियत बिंदु मानने में (जैसा कि मूल सेल्सियस मापक्रम में किया गया था।) क्या दोष है?

(b) जैसा कि ऊपर वर्णन किया जा चुका है कि मूल सेल्सियस मापक्रम में दो नियत बिंदु थे जिनको क्रमशः 0 °C तथा 100 °C संख्याएँ निर्धारित की गई थीं। परम ताप मापक्रम पर दो में से एक नियत बिंदु जल का त्रिक बिंदु लिया गया है जिसे केल्विन परम ताप मापक्रम पर संख्या 273.16 K निर्धारित की गई है। इस मापक्रम (केल्विन परम ताप) पर अन्य नियत बिंदु क्या है?

(c) परम ताप (केल्विन मापक्रम) T तथा सेल्सियस मापक्रम पर ताप t_c में संबंध इस प्रकार है:

$$t_c = T - 273.15$$

इस संबंध में हमने 273.15 लिखा है 273.16 क्यों नहीं लिखा?

(d) उस परम ताप मापक्रम पर, जिसके एकांक अंतराल का आमाप फारेनहाइट के एकांक अंतराल की आमाप के बराबर है, जल के त्रिक बिंदु का ताप क्या होगा?

10.5 दो आदर्श गैस तापमापियों A तथा B में क्रमशः ऑक्सीजन तथा हाइड्रोजन प्रयोग की गई है। इनके प्रेक्षण निम्नलिखित है :

ताप	**दाब तापमापी A में**	**दाब तापमापी B में**
जल का त्रिक बिंदु	1.250×10^5 Pa	0.200×10^5 Pa
सल्फर का सामान्य गलनांक	1.797×10^5 Pa	0.287×10^5 Pa

(a) तापमापियों A तथा B के द्वारा लिए गए पाठ्यांकों के अनुसार सल्फर के सामान्य गलनांक के परमताप क्या हैं?

(b) आपके विचार से तापमापियों A तथा B के उत्तरों में थोड़ा अंतर होने का क्या कारण है? (दोनों तापमापियों में कोई दोष नहीं है)। दो पाठ्यांकों के बीच की विसंगति को कम करने के लिए इस प्रयोग में और क्या प्रावधान आवश्यक हैं?

10.6 किसी 1m लंबे स्टील के फीते का यथार्थ अंशांकन 27.0 °C पर किया गया है। किसी तप्त दिन जब ताप 45°C था तब इस फीते से किसी स्टील की छड़ की लंबाई 63.0 cm मापी गई। उस दिन स्टील की छड़ की वास्तविक लंबाई क्या थी? जिस दिन ताप 27.0 °C होगा उस दिन इसी छड़ की लंबाई क्या होगी? स्टील का रेखीय प्रसार गुणांक = 1.20×10^{-5} K^{-1} ।

10.7 किसी बड़े स्टील के पहिए को उसी पदार्थ की किसी धुरी पर ठीक बैठाना है। 27°C पर धुरी का बाहरी व्यास 8.70 cm तथा पहिए के केंद्रीय छिद्र का व्यास 8.69 cm है। सूखी बर्फ द्वारा धुरी को ठंडा किया गया है। धुरी के किस ताप पर पहिया धुरी पर चढ़ेगा? यह मानिए कि आवश्यक ताप परिसर में स्टील का रैखिक प्रसार गुणांक नियत रहता है: $\alpha_{\text{स्टील}} = 1.20 \times 10^{-5} K^{-1}$।

10.8 ताँबे की चादर में एक छिद्र किया गया है। 27.0 °C पर छिद्र का व्यास 4.24 cm है। इस धातु की चादर को 227 °C तक तप्त करने पर छिद्र के व्यास में क्या परिवर्तन होगा? ताँबे का रेखीय प्रसार गुणांक = 1.70×10^{-5} K^{-1}।

10.9 27°C पर 1.8 cm लंबे किसी ताँबे के तार को दो दृढ़ टेकों के बीच अल्प तनाव रखकर थोड़ा कसा गया है। यदि तार को –39 °C ताप तक शीतित करें तो तार में कितना तनाव उत्पन्न हो जाएगा? तार का व्यास 2.0 mm है। पीतल का रेखीय प्रसार गुणांक = 2.0×10^{-5} K^{-1}, पीतल का यंग प्रत्यास्थता गुणांक = 0.91×10^{11} Pa।

10.10 50 cm लंबी तथा 3.0 mm व्यास की किसी पीतल की छड़ को उसी लंबाई तथा व्यास की किसी स्टील की छड़ से जोड़ा गया है। यदि ये मूल लंबाइयाँ 40°C पर हैं, तो 250 °C पर संयुक्त छड़ की लंबाई में क्या परिवर्तन होगा? क्या संधि पर कोई तापीय प्रतिबल उत्पन्न होगा? छड़ के सिरों को प्रसार के लिए मुक्त रखा गया है। (ताँबे तथा स्टील के रेखीय प्रसार गुणांक क्रमशः = 2.0×10^{-5} K^{-1}, स्टील = 1.2×10^{-5} K^{-1} हैं।)

10.11 ग्लिसरीन का आयतन प्रसार गुणांक 49×10^{-5} K^{-1} है। ताप में 30 °C की वृद्धि होने पर इसके घनत्व में क्या आंशिक परिवर्तन होगा?

10.12 8.0 kg द्रव्यमान के किसी ऐलुमिनियम के छोटे ब्लॉक में छिद्र करने के लिए किसी 10 kW की बरमी का उपयोग किया गया है। 2.5 मिनट में ब्लॉक के ताप में कितनी वृद्धि हो जाएगी। यह मानिए कि 50% शक्ति तो स्वयं बरमी को गर्म करने में खर्च हो जाती है अथवा परिवेश में लुप्त हो जाती है। ऐलुमिनियम की विशिष्ट ऊष्मा धारिता = $0.91\ J\ g^{-1}\ K^{-1}$ है।

10.13 2.5 kg द्रव्यमान के ताँबे के गुटके को किसी भट्ठी में 500 °C तक तप्त करने के पश्चात् किसी बड़े हिम-ब्लॉक पर रख दिया जाता है। गलित हो सकने वाली हिम की अधिकतम मात्रा क्या है? ताँबे की विशिष्ट ऊष्मा धारिता = $0.39\ J\ g^{-1}\ K^{-1}$; बर्फ की संगलन ऊष्मा = $335\ J\ g^{-1}$ ।

10.14 किसी धातु की विशिष्ट ऊष्मा धारिता के प्रयोग में 0.20 kg के धातु के गुटके को 150 °C पर तप्त करके, किसी ताँबे के ऊष्मामापी (जल तुल्यांक = 0.025 kg), जिसमें 27 °C का 150 cm^3 जल भरा है, में गिराया जाता है। अंतिम ताप 40 °C है। धातु की विशिष्ट ऊष्मा धारिता परिकलित कीजिए। यदि परिवेश में क्षय ऊष्मा उपेक्षणीय न मानकर परिकलन किया जाता है, तब क्या आपका उत्तर धातु की विशिष्ट ऊष्मा धारिता के वास्तविक मान से अधिक मान दर्शाएगा अथवा कम?

10.15 कुछ सामान्य गैसों के कक्ष ताप पर मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के प्रेक्षण नीचे दिए गए हैं:

गैस	**मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता (C_v)** ($cal\ mol^{-1}\ K^{-1}$)
हाइड्रोजन	4.87
नाइट्रोजन	4.97
ऑक्सीजन	5.02
नाइट्रिक ऑक्साइड	4.99
कार्बन मोनोक्साइड	5.01
क्लोरीन	6.17

इन गैसों की मापी गई मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिताएँ एक परमाणुक गैसों की मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं से सुस्पष्ट रूप से भिन्न हैं। प्रतीकात्मक रूप में किसी एक परमाणुक गैस की मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता 2.92 cal/mol K होती है। इस अंतर का स्पष्टीकरण कीजिए। क्लोरीन के लिए कुछ अधिक मान (शेष की अपेक्षा) होने से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

10.16 101°F ताप ज्वर से पीड़ित किसी बच्चे को एन्टीपायरिन (ज्वर कम करने की दवा) दी गई जिसके कारण उसके शरीर से पसीने के वाष्पन की दर में वृद्धि हो गई। यदि 20 मिनट में ज्वर 98 °F तक गिर जाता है तो दवा द्वारा होने वाले अतिरिक्त वाष्पन की औसत दर क्या है? यह मानिए कि ऊष्मा ह्रास का एकमात्र उपाय वाष्पन ही है। बच्चे का द्रव्यमान 30 kg है। मानव शरीर की विशिष्ट ऊष्मा धारिता जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता के लगभग बराबर है तथा उस ताप पर जल के वाष्पन की गुप्त ऊष्मा $580\ cal\ g^{-1}$ है।

10.17 थर्मोकोल का बना 'हिम बॉक्स' विशेषकर गर्मियों में कम मात्रा के पके भोजन के भंडारण का सस्ता तथा दक्ष साधन है। 30 cm भुजा के किसी हिम बॉक्स की मोटाई 5.0 cm है। यदि इस बॉक्स में 4.0 kg हिम रखा है तो 6 h के पश्चात् बचे हिम की मात्रा का आकलन कीजिए। बाहरी ताप 45 °C है तथा थर्मोकोल की ऊष्मा चालकता $0.01\ J\ s^{-1}\ m^{-1}\ K^{-1}$ है। (हिम की संगलन ऊष्मा = $335 \times 10^3\ J\ kg^{-1}$)

10.18 किसी पीतल के बॉयलर की पेंदी का क्षेत्रफल $0.15\ m^2$ तथा मोटाई 1.0 cm है। किसी गैस स्टोव पर रखने पर इसमें 6.0 kg/min की दर से जल उबलता है। बॉयलर के संपर्क की ज्वाला के भाग का ताप आकलित कीजिए। पीतल की ऊष्मा चालकता = $109\ J\ s^{-1}\ m^{-1}\ K^{-1}$; जल की वाष्पन ऊष्मा = $2256 \times 10^3\ J\ kg^{-1}$ है।

10.19 स्पष्ट कीजिए कि क्यों –

(a) अधिक परावर्तकता वाले पिण्ड अल्प उत्सर्जक होते हैं।

(b) कंपकंपी वाले दिन लकड़ी की ट्रे की अपेक्षा पीतल का गिलास कहीं अधिक शीतल प्रतीत होता है।

(c) कोई प्रकाशिक उत्तापमापी (उच्च तापों को मापने की युक्ति), जिसका अंशांकन किसी आदर्श कृष्णिका के विकिरणों के लिए किया गया है, खुले में रखे किसी लाल तप्त लोहे के टुकड़े का ताप काफी कम मापता है, परन्तु जब उसी लोहे के टुकड़े को भट्ठी में रखते हैं, तो वह ताप का सही मान मापता है।

(d) बिना वातावरण के पृथ्वी अशरणीय शीतल हो जाएगी।

(e) भाप के परिचालन पर आधारित तापन निकाय तप्त जल के परिचालन पर आधारित निकायों की अपेक्षा भवनों को उष्ण बनाने में अधिक दक्ष होते हैं।

10.20 किसी पिण्ड का ताप 5 मिनट में 80 °C से 50 °C हो जाता है। यदि परिवेश का ताप 20°C है, तो उस समय का परिकलन कीजिए जिसमें उसका ताप 60 °C से 30 °C हो जाएगा।

11089CH12

अध्याय 11

ऊष्मागतिकी

11.1 भूमिका
11.2 तापीय साम्य
11.3 ऊष्मागतिकी का शून्य कोटि नियम
11.4 ऊष्मा, आंतरिक ऊर्जा तथा कार्य
11.5 ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम
11.6 विशिष्ट ऊष्मा धारिता
11.7 ऊष्मागतिकीय अवस्था चर तथा अवस्था का समीकरण
11.8 ऊष्मागतिकीय प्रक्रम
11.9 ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम
11.10 उत्क्रमणीय व अनुत्क्रमणीय प्रक्रम
11.10 कार्नो इंजन

सारांश
विचारणीय विषय
अभ्यास

11.1 भूमिका

पिछले अध्याय में हमने द्रव्यों के तापीय गुणों का अध्ययन किया। इस अध्याय में हम उन नियमों का अध्ययन करेंगे जो ऊष्मीय ऊर्जा को निर्धारित करते हैं। हम उन प्रक्रियाओं का अध्ययन करेंगे जिनमें कार्य ऊष्मा में परिवर्तित होता है, तथा विलोमत: ऊष्मा भी कार्य में परिवर्तित होती है । शीत ऋतु में जब हम हथेलियों को परस्पर रगड़ते हैं तो हमें गरमी की अनुभूति होती है क्योंकि इस प्रक्रिया में किया गया कार्य ऊष्मा उत्पन्न करता है । इसके विपरीत, भाप इंजन में वाष्प की ऊष्मा का उपयोग लाभप्रद कार्य को संपन्न करने में अर्थात् पिस्टन को गति देने में होता है जिसके परिणामस्वरूप रेलगाड़ी के पहिए घूमते हैं।

भौतिकी में ऊष्मा, ताप, कार्य आदि की अवधारणाओं को अधिक सावधानीपूर्वक परिभाषित करने की आवश्यकता पड़ती है । ऐतिहासिक रूप से ऊष्मा की सटीक अवधारणा तक पहुँचने के लिए पर्याप्त समय लगा । आधुनिक अवधारणा के पूर्व ऊष्मा को ऐसे सूक्ष्म अदृश्य तरल के रूप में समझा गया जो किसी पदार्थ के रंध्रों में भरा रहता है । गरम व ठंडे पिंडों के पारस्परिक संपर्क में आने पर यह तरल (जिसे कैलॉरिक कहते थे) ठंडे पिंड से अपेक्षाकृत गरम पिंड में बहने लगता है ! यह बिलकुल वैसा ही है जैसा उस समय होता है जब भिन्न-भिन्न ऊँचाइयों तक पानी से भरी दो टंकियों को एक क्षैतिज नल से जोड़ दिया जाता है । जल का बहाव उस समय तक निरंतर बना रहता है जब तक दोनों टंकियों में जल के तल समान न हो जाएँ। इसी के समान ऊष्मा की 'कैलॉरिक' धारणा में ऊष्मा उस समय तक प्रवाहित होती रहती है जब तक कि 'कैलॉरिक तल' (अर्थात् ताप) समान नहीं हो जाते ।

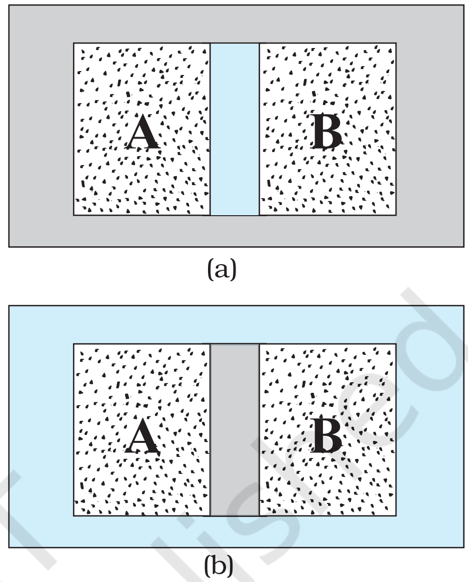
इसी बीच, ऊष्मा को ऊर्जा के रूप में कल्पित करने की आधुनिक अवधारणा के कारण इसके (ऊष्मा के) तरल स्वरूप को नकार दिया गया । इस संबंध में 1798 में बेंजामिन थॉमसन (जिन्हें काउन्ट रम्फोर्ड भी कहते हैं) ने एक महत्वपूर्ण प्रयोग भी किया । इन्होंने पाया कि पीतल की तोप में छेद करते समय इतनी अधिक ऊष्मा उत्पन्न होती है कि उससे पानी उबल सकता है । इससे अधिक महत्वपूर्ण तथ्य यह प्राप्त हुआ कि प्रयोग में उत्पन्न ऊष्मा का परिमाण उस कार्य पर निर्भर करता था जो घोड़े ड्रिल को घुमाने में करते थे न कि ड्रिल के पैनेपन पर । कैलॉरिक स्वरूप के अनुसार अधिक पैनी ड्रिल को रंध्रों से अधिक ऊष्मा तरल बाहर निकालना चाहिए, किंतु प्रयोग में यह सही नहीं पाया गया । प्रेक्षणों की सबसे अधिक स्वाभाविक व्याख्या यह थी कि ऊष्मा ऊर्जा का ही एक रूप है तथा प्रयोग से भी यह प्रमाणित हो गया कि ऊर्जा एक रूप से दूसरे रूप में अर्थात् कार्य से ऊष्मा में रूपांतारित हो जाती है ।

ऊष्मागतिकी भौतिकी की वह शाखा है जो ऊष्मा तथा ताप की अवधारणा एवं ऊष्मा के अन्य प्रकार की ऊर्जाओं में अंतरा-रूपान्तरण का विवेचन करती है । ऊष्मागतिकी एक स्थूल विज्ञान है, क्योंकि यह किसी निकाय की स्थूल प्रकृति पर विचार करती है न कि द्रव्य की आण्विक संरचना पर । वास्तव में, इससे संबंधित अवधारणाओं तथा नियमों का प्रतिपादन 19वीं शताब्दी में उस समय हुआ था जब द्रव्य के आण्विक स्वरूप को दृढ़तापूर्वक प्रमाणित नहीं किया गया था । ऊष्मागतिकी के वर्णन में निकाय के अपेक्षाकृत कुछ ही स्थूल चर समाहित होते हैं जो सामान्य अनुभव पर आधारित हैं तथा जिन्हें प्रत्यक्ष रूप में मापा जा सकता है । उदाहरणार्थ, किसी गैस के सूक्ष्म वर्णन में उसकी रचना करने वाले अगणित अणुओं के निर्देशांकों एवं वेगों का निर्धारण आवश्यक होता है । हालांकि गैसों के अणुगति सिद्धांत का विवरण बहुत विस्तृत नहीं है फिर भी इसमें अणुओं के वेगों का विवरण समाहित है । इसके विपरीत किसी गैस के ऊष्मागतिकीय विवरण में आण्विक वर्णन पूर्ण रूप से नकार दिया जाता है । ऊष्मागतिकी में किसी गैस की अवस्था दाब, आयतन, ताप, द्रव्यमान तथा संगठन जैसे ऐसे स्थूल चरों द्वारा निर्धारित होती है जिन्हें हम अपनी इंद्रियों से अनुभव करते हैं और माप सकते हैं*।

यांत्रिकी एवं ऊष्मागतिकी के बीच भेद आपके मस्तिष्क में भलीभांति आ जाना चाहिए । यांत्रिकी में हमारी रुचि बलों तथा बल आघूर्णों के प्रभाव में गति कर रहे कणों एवं पिण्डों में होती है । ऊष्मागतिकी में संपूर्ण निकाय की गति पर विचार नहीं किया जाता । इसकी रुचि पिण्ड की आंतरिक स्थूल अवस्था में होती है । जब बंदूक से गोली दागते हैं तब जो परिवर्तन होता है वह गोली की यांत्रिक अवस्था (विशेषकर गतिज ऊर्जा) में परिवर्तन होता है, उसके ताप में नहीं । जब गोली लकड़ी में धँसकर रुक जाती है तो गोली की गतिज ऊर्जा ऊष्मा में रूपांतरित हो जाती है जिससे गोली तथा उसके चारों ओर की लकड़ी की सतहों का ताप परिवर्तित हो जाता है । ताप गोली की आंतरिक गति (जो अव्यवस्थित है) की ऊर्जा से संबंधित होता है न कि गोली की संपूर्ण गति से ।

11.2 तापीय साम्य

यांत्रिकी में साम्यावस्था से तात्पर्य है कि निकाय पर नेट बाह्य बल व बल आघूर्ण शून्य हैं । ऊष्मागतिकी में साम्यावस्था का अर्थ भिन्न संदर्भ में दृष्टिगोचर होता है : निकाय की अवस्था को हम उस समय साम्यावस्था में कहते हैं जब निकाय को अभिलक्षणित करने वाले स्थूल चर समय के साथ परिवर्तित नहीं होते । उदाहरणार्थ, किसी पर्यावरण से पूर्णतः ऊष्मारोधी बंद दृढ़ पात्र में भरी कोई गैस ऊष्मागतिक रूप से तब साम्यावस्था में होगी जब उसके दाब, आयतन, ताप, द्रव्यमान के परिमाण तथा संगठन समय के साथ परिवर्तित न हों ।



चित्र 11.1 (a) (दो गैसों के) निकाय A व B एक रुद्धोष्म दीवार से पृथक् हैं : इस दीवार से ऊष्मा आर-पार नहीं जा पाती । (b) यही निकाय A व B एक ऊष्मा-पार्थ दीवार से पृथक् दर्शाए गए हैं । यह एक चालक दीवार होती है जिससे ऊष्मा एक निकाय से दूसरे में चली जाती है । इस उदाहरण में तापीय साम्य यथोचित समय में प्राप्त हो जाता है ।

कोई निकाय साम्यावस्था में है कि नहीं व्यापक रूप में यह चारों ओर के परिवेश तथा उस दीवार की प्रकृति पर निर्भर करता है जो निकाय को परिवेश से पृथक् करती है । कल्पना कीजिए कि दो गैसें A व B दो भिन्न-भिन्न पात्रों में भरी हैं । प्रयोग द्वारा हमें पता है कि किसी गैस के दिए हुए द्रव्यमान के दाब व ताप को उसके दो स्वतंत्र चरों के रूप में चुना जा सकता है । मान लीजिए कि गैसों के दाब व आयतन क्रमशः (P_A, V_A) तथा (P_B, V_B) हैं । कल्पना कीजिए कि पहले दोनों निकाय पास-पास हैं परंतु उन्हें किसी रुद्धोष्म दीवार (एक **ऊष्मारोधी दीवार**) द्वारा एक दूसरे से पृथक् रखा गया है । इस दीवार के कारण ऊर्जा (ऊष्मा) एक पात्र से दूसरे पात्र में नहीं जा पाती है । निकायों को भी शेष परिवेश से इसी प्रकार की रुद्धोष्म दीवार से पृथक् रखते हैं । इस व्यवस्था का आरेखीय चित्रण [11.1(a)] में दिया गया है । यहाँ यह पाया गया है कि (P_A, V_A) के किसी

* ऊष्मागतिकी में अन्य ऐसे चर भी निहित होते हैं जो हमारी इंद्रियों को इतने सुस्पष्ट नहीं होते (उदाहरणार्थ, एंट्रॉपी, एंथाल्पी (संपूर्ण ऊष्मा), आदि जिनके विषय में आप उच्च कक्षाओं में पढ़ेंगे), किंतु ये सभी स्थूल चर हैं । यद्यपि किसी उष्मागतिकीय अवस्था को पाँच अवस्था चरों, जैसे दाब, आयतन, ताप, आंतरिक ऊर्जा और एंट्रॉपी के रूप में निरूपित किया जाता है । किसी निकाय की एंट्रॉपी उसकी अव्यवस्था का माप होता है ।

भी संभावित युग्म का मान (P_B, V_B) के किसी भी संभव युग्म के मान के साथ साम्यावस्था में होगा। पुन: कल्पना कीजिए कि **रुद्धोष्म दीवार** को एक **ऊष्मा-पार्थ-दीवार** से प्रतिस्थापित कर दिया गया है – यह दीवार (ऊष्मा) ऊर्जा को एक निकाय से दूसरे निकाय में जाने देती है। ऐसा करने में यह देखा गया है कि निकायों A व B के स्थूल चर स्वत: उस समय तक परिवर्तित होते हैं जब तक कि दोनों निकाय साम्यावस्था की स्थिति प्राप्त नहीं कर लेते। इसके पश्चात् उनकी अवस्था में कोई परिवर्तन नहीं होता है। इस स्थिति को चित्र [11.1(b)] में दर्शाया गया है। मान लीजिए कि दोनों गैसों के दाब व आयतन संबंधी चर परिवर्तित होकर क्रमश: (P'_A, V'_A) तथा (P'_B, V'_B) हो जाते हैं ताकि A व B की नयी अवस्थाएँ पुन: एक-दूसरे की साम्यावस्था में हो जाती हैं**। एक निकाय से दूसरे निकाय में अब और ऊर्जा का प्रवाह नहीं होता। ऐसी स्थिति में हम कहते हैं कि निकाय A, निकाय B के साथ तापीय साम्य में है।

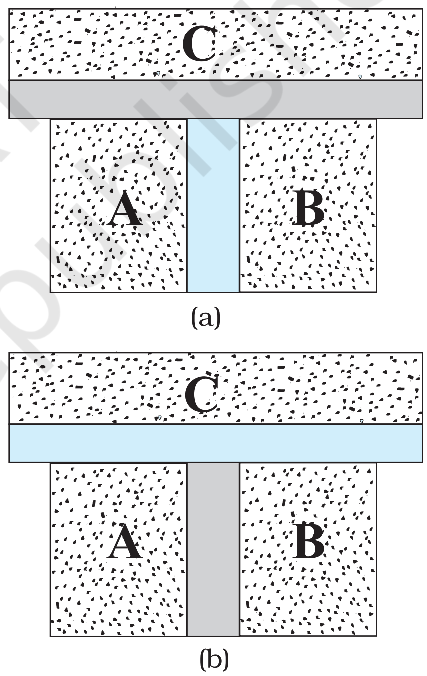
दो निकायों के मध्य की साम्यावस्था की स्थिति को क्या अभिलक्षित करती है ? आप अपने अनुभव से उत्तर का अनुमान लगा सकते हैं। तापीय साम्य में, दो निकायों के ताप समान होते हैं। हम जानेंगे कि ऊष्मागतिकी में ताप की अवधारणा तक कैसे पहुँचते हैं ? ऊष्मागतिकी का शून्य कोटि का नियम इसकी ओर संकेत करता है।

11.3 ऊष्मागतिकी का शून्य कोटि नियम

कल्पना कीजिए कि दो निकाय A व B एक रुद्धोष्म दीवार से पृथक् हैं। इनमें से प्रत्येक एक तीसरे निकाय C से एक सुचालक दीवार द्वारा संपर्क में हैं [चित्र 11.2(a)]। निकायों की अवस्थाएँ (अर्थात् उनके स्थूल चर) तब तक परिवर्तित होंगी जब तक A व B दोनों निकाय C के साथ तापीय साम्य में नहीं आ जाते हैं। जब ऐसा हो जाए तो कल्पना कीजिए कि A व B के मध्य की रुद्धोष्म दीवार एक सुचालक दीवार से प्रतिस्थापित कर दी जाती है तथा C को A व B से किसी रुद्धोष्म दीवार से पृथक् कर दिया जाता है [चित्र 11.2(b)]। ऐसा देखा जाता है कि A व B की अवस्थाएँ अब और नहीं बदलतीं अर्थात् वे **दोनों अब तापीय साम्य में होती हैं**। यह प्रेक्षण ऊष्मागतिकी के शून्य कोटि नियम का आधार बना। यह नियम बतलाता है कि ***यदि दो निकाय किसी तीसरे निकाय के साथ पृथक्-पृथक् रूप से तापीय साम्य में हैं तो वे परस्पर भी तापीय साम्य में होते हैं।*** यहाँ यह बात ध्यान में रखनी चाहिए कि ऊष्मागतिकी के प्रथम व द्वितीय नियम की अभिव्यक्ति तथा उनके क्रमांकन के बहुत समय बाद 1931 में आर.एच. फाउलर ने शून्य कोटि नियम का प्रतिपादन किया था।

शून्य कोटि नियम से यह संकेत मिलता है कि जब दो निकाय A व B परस्पर तापीय साम्य में होते हैं, तो ऐसी कोई भौतिक राशि है जो दोनों निकायों के लिए समान मान रखती है। यह ऊष्मागतिक चर, जिसका मान तापीय साम्य वाले निकायों के लिए समान होता है, ताप (T) कहलाता है। अत: यदि A व B साम्यावस्था में तीसरे निकाय C से पृथक् हैं तो $T_A = T_C$ तथा $T_B = T_C$। इसका तात्पर्य यह है कि $T_A = T_B$ अर्थात् निकाय A व B स्वयं भी तापीय साम्य में हैं।

शून्य कोटि नियम के माध्यम से हमने विधिवत ताप की अवधारणा विकसित की है। हमारे सामने पुन: एक प्रश्न उत्पन्न होता है : भिन्न-भिन्न पिंडों के ताप के लिए हम अंकिक मानों का निर्धारण कैसे करें? दूसरे शब्दों में, हम ताप मापक्रम कैसे बनाएँ? तापमिति इस मौलिक प्रश्न से संबंध रखती है जिसके विषय में हम अगले अनुभाग में अध्ययन करेंगे।



चित्र 11.2 (a) निकाय A व B जो एक रुद्धोष्म दीवार से पृथक हैं जबकि इनमें से प्रत्येक एक तीसरे निकाय C से एक सुचालक दीवार द्वारा संपर्क में है। (b) A व B के मध्य की रुद्धोष्म दीवार को किसी सुचालक दीवार से प्रतिस्थापित किया गया है जबकि C को A व B से रुद्धोष्म दीवार से पृथक दर्शाया गया है।

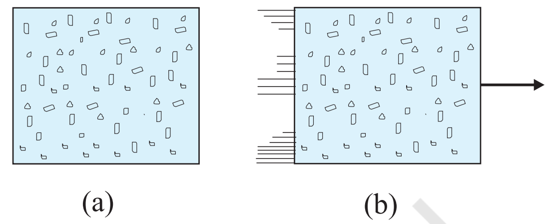
** यह आवश्यक नहीं है कि दोनों चर बदलें। ऐसा प्रतिबंधों पर निर्भर करता है। उदाहरण के लिए, यदि गैस स्थिर आयतन वाले पात्र में भरी हो तो तापीय साम्य के लिए केवल गैसों के दाब को परिवर्तित होना चाहिए।

11.4 ऊष्मा, आंतरिक ऊर्जा तथा कार्य

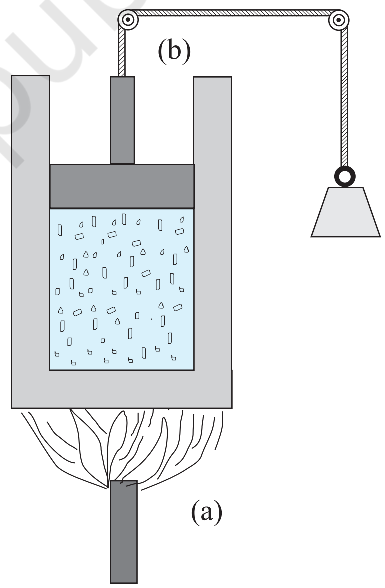
ऊष्मागतिकी के शून्य कोटि नियम से ताप की अवधारणा की उत्पत्ति हुई जो हमारे सामान्य ज्ञान के अनुकूल है। ताप किसी पिण्ड की उष्णता का द्योतक है। जब दो पिण्ड ऊष्मीय संपर्क में लाए जाते हैं तो इससे ऊष्मा के प्रवाह की दिशा निर्धारित होती है। ऊष्मा उच्च ताप वाले पिण्ड से निम्न ताप वाले पिण्ड की ओर प्रवाहित होती है। जब ताप समान हो जाते हैं तो प्रवाह रुक जाता है। ऐसी स्थिति में दोनों पिण्ड तापीय साम्य में होते हैं। हम यह विस्तार से पढ़ चुके हैं कि भांति-भांति के पिण्डों के ताप के निर्धारण के लिए ताप मापक्रम कैसे बनाए जाते हैं। अब हम ऊष्मा तथा तत्संबंधित राशियों; जैसे—आंतरिक ऊर्जा तथा कार्य की अवधारणाओं का वर्णन करेंगे।

किसी निकाय की आंतरिक ऊर्जा की अवधारणा को समझना कठिन नहीं है। हम जानते हैं कि प्रत्येक स्थूल निकाय असंख्य अणुओं से निर्मित है। आंतरिक ऊर्जा इन अणुओं की स्थितिज व गतिज ऊर्जाओं का योग है। हमने यह टिप्पणी की है कि ऊष्मागतिकी में निकाय की समग्र रूप से गतिज ऊर्जा प्रासंगिक नहीं होती। इस प्रकार, निर्देश फ्रेम में आंतरिक ऊर्जा अणु की गतिज व स्थितिज ऊर्जा के योग के बराबर होती है जिसके सापेक्ष निकाय का द्रव्यमान-केंद्र विरामावस्था में होता है। इस प्रकार, इसमें केवल निकाय के अणुओं की यादृच्छिक गति से संबंधित (अव्यवस्थित) ऊर्जा ही समाहित होती है। निकाय की आंतरिक ऊर्जा को U से चिह्नित करते हैं।

यद्यपि हमने आंतरिक ऊर्जा के अर्थ को समझने के लिए आण्विक चित्र प्रस्तुत किया है तथापि जहाँ तक ऊष्मागतिकी का संबंध है, U निकाय का केवल एक स्थूल चर ही है। आंतरिक ऊर्जा के संबंध में एक महत्वपूर्ण तथ्य यह है कि यह केवल निकाय की अवस्था पर निर्भर करती है न कि इस बात पर कि यह अवस्था किस प्रकार प्राप्त हुई। निकाय की आंतरिक ऊर्जा U ऊष्मागतिकीय 'अवस्था चर' का एक उदाहरण है। इसका मान निकाय की दी हुई अवस्था पर निर्भर करता है न कि उसके इतिवृत्ति (History) (अर्थात् उस स्थिति तक पहुँचने के लिए अनुसरण किए गए पथ) पर। अत: किसी गैस के दिए गए द्रव्यमान के लिए आंतरिक ऊर्जा उसकी स्थिति पर निर्भर करती है। यह स्थिति दाब, आयतन व ताप के विशिष्ट मानों से वर्णित होती है। यह इस बात पर निर्भर नहीं करती कि गैस की यह स्थिति किस प्रकार प्राप्त हुई। दाब, आयतन, ताप तथा आंतरिक ऊर्जा निकाय (गैस) के ऊष्मागतिकीय अवस्था चर कहलाते हैं (अनुभाग 11.7 देखें)। यदि गैस के अल्पप्रभावी अंतराण्विक बलों की उपेक्षा कर दें तो गैस की आंतरिक ऊर्जा उसके अणुओं की अनेक यादृच्छिक गतियों से संबद्ध गतिज ऊर्जाओं के योग के ठीक बराबर होती है। अगले अध्याय में हम पढ़ेंगे कि किसी गैस में यह गति केवल स्थानांतरीय ही नहीं होती (इसमें गति पात्र के आयतन में एक बिंदु से दूसरे बिंदु के मध्य होती है), वरन् इसमें अणु की घूर्णी तथा कंपन गति भी होती है (चित्र 11.3)।



चित्र 11.3 (a) जब बॉक्स विरामावस्था में है तो गैस की आंतरिक ऊर्जा U उसके अणुओं की गतिज व स्थितिज ऊर्जा के योग के बराबर होती है। विभिन्न प्रकार की गतियों (स्थानांतरीय, घूर्णी, कंपन) के कारण गतिज ऊर्जा को U में समाहित किया जाता है। (b) यदि यही समग्र बॉक्स कुछ वेग से गतिमान है, तो बॉक्स की गतिज ऊर्जा को U में सम्मिलित नहीं करना है।



चित्र 11.4 ऊष्मा व कार्य किसी निकाय में ऊर्जा स्थानांतरण की दो विभिन्न विधियाँ हैं जिनसे उसकी आंतरिक ऊर्जा में परिवर्तन होता है। (a) निकाय तथा परिवेश के बीच तापांतर के कारण ऊष्मा को ऊर्जा के स्थानांतरण के रूप में परिभाषित करते हैं। (b) कार्य उन साधनों (उदाहरणार्थ, पिस्टन से जुड़े भारों को ऊपर नीचे करके पिस्टन को गति देना) द्वारा उत्पन्न ऊर्जा का स्थानांतरण है जिनमें तापांतर समाहित नहीं होता।

किसी निकाय की आंतरिक ऊर्जा में किन उपायों से परिवर्तन किए जा सकते हैं ? सुविधा की दृष्टि से पुनः कल्पना कीजिए कि चित्र 11.4 के अनुसार निकाय किसी दिए गए द्रव्यमान की एक गैस है जो एक सिलिंडर में भरी है जिसमें गतिशील पिस्टन लगा है। अनुभव यह बताता है कि गैस की अवस्था (तथा इस प्रकार उसकी आंतरिक ऊर्जा) परिवर्तित करने के दो उपाय होते हैं। एक उपाय है कि सिलिंडर को उस पिण्ड के संपर्क में रखें जो गैस की अपेक्षा उच्च ताप पर है। तापांतर के कारण ऊर्जा (ऊष्मा) गरम पिण्ड से गैस में प्रवाहित होगी। इससे गैस की आंतरिक ऊर्जा बढ़ जाएगी। दूसरा उपाय है कि पिस्टन को नीचे की ओर दबाया जाए (अर्थात् निकाय पर कार्य किया जाए)। इसमें भी गैस की आंतरिक ऊर्जा बढ़ जाती है। निःसंदेह ये दोनों बातें विपरीत दिशा में भी संभव होती हैं। यदि चारों ओर के परिवेश का ताप कम है तो ऊष्मा गैस से परिवेश में प्रवाहित होगी। इसी प्रकार, गैस पिस्टन को ऊपर की ओर धक्का दे सकती है और परिवेश पर कार्य कर सकती है। संक्षेप में, ऊष्मा और कार्य दो भिन्न-भिन्न विधियाँ हैं जिनसे ऊष्मीय निकाय की स्थिति परिवर्तित होती है तथा उसकी आंतरिक ऊर्जा में परिवर्तन होता है।

ऊष्मा एवं आंतरिक ऊर्जा की धारणाओं में अंतर को सावधानीपूर्वक समझना आवश्यक है। ऊष्मा निश्चित रूप से ऊर्जा है परंतु यह ऊर्जा पारगमन में है। यह मात्र शब्दों का खेल नहीं है। दोनों में अंतर मूल महत्त्व का है। किसी ऊष्मागतिकी निकाय की स्थिति उसकी आंतरिक ऊर्जा से अभिलक्षित होती है न कि ऊष्मा से। इस प्रकार का प्रकथन कि ***'किसी दी हुई अवस्था में गैस में ऊष्मा की कुछ मात्रा होती है'*** उतना ही निरर्थक है जितना कि यह प्रकथन कि ***'किसी दी हुई स्थिति में गैस में कुछ कार्य निहित होता है।'*** इसके विपरीत, ***'किसी दी हुई अवस्था में गैस में आंतरिक ऊर्जा की कुछ मात्रा होती है'*** पूरी तरह से एक सार्थक प्रकथन है। इसी प्रकार से, ऐसे प्रकथन जैसे ***'निकाय को एक निश्चित मात्रा की ऊष्मा दी गई है'*** या ***'निकाय द्वारा एक निश्चित मात्रा का कार्य किया गया'*** पूर्णतः अर्थपूर्ण सार्थक प्रकथन हैं।

संक्षेप में, ऊष्मा व कार्य ऊष्मागतिकी में स्थिति चर नहीं होते। ये किसी निकाय में ऊर्जा स्थानांतरण की विधियाँ होती हैं जिससे उसकी आंतरिक ऊर्जा परिवर्तित होती है। जो, जैसा कि पहले वर्णन कर चुके हैं, एक अवस्था चर होता है।

साधारण भाषा में हमें प्रायः ऊष्मा तथा आंतरिक ऊर्जा में भ्रम बना रहता है। कुछ प्राथमिक भौतिकी की पुस्तकों में कभी-कभी इस भेद की उपेक्षा कर दी जाती है। तथापि ऊष्मागतिकी को भलीभांति समझने के लिए यह विभेद आवश्यक है।

11.5 ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम

हम यह देख चुके हैं कि किसी निकाय की आंतरिक ऊर्जा U दो विधियों से ऊर्जा स्थानांतरण के कारण परिवर्तित हो सकती है। ये विधियाँ हैं : ऊष्मा तथा कार्य। कल्पना कीजिए कि

ΔQ = परिवेश *द्वारा* निकाय *को* दी गई ऊष्मा

ΔW = निकाय *द्वारा* परिवेश *पर* किया गया कार्य

ΔU = निकाय *की* आंतरिक ऊर्जा में परिवर्तन

ऊर्जा संरक्षण के सामान्य नियम में यह अंतर्निहित है कि

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W \qquad (11.1)$$

इसका तात्पर्य यह है कि जो ऊर्जा (ΔQ) निकाय को दी जाती है, उसका कुछ अंश निकाय की आंतरिक ऊर्जा में वृद्धि करता है (ΔU) तथा शेष परिवेश पर किया गया कार्य (ΔW) है। समीकरण (11.1) को **ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम** के रूप में जाना जाता है। यह ऊर्जा संरक्षण का केवल सामान्य नियम है जिसे किसी भी उस निकाय पर लागू किया जा सकता है जिसमें परिवेश को अथवा परिवेश से ऊष्मा स्थानांतरण पर ध्यान दिया जाता है।

मान लीजिए कि हम समीकरण (11.1) को वैकल्पिक रूप में प्रस्तुत करते हैं,

$$\Delta Q - \Delta W = \Delta U \qquad (11.2)$$

अब मान लीजिए कि निकाय किसी आरंभिक अवस्था से अंतिम अवस्था में कई प्रकार से आता है। उदाहरणार्थ, गैस की अवस्था (P_1, V_1) से परिवर्तित करके (P_2, V_2) कर दी जाए तो हम पहले गैस के दाब को स्थिर रखकर उसके आयतन को V_1 से V_2 में परिवर्तित करते हैं अर्थात् पहले हम अवस्था (P_1, V_2) में जा सकते हैं और फिर गैस के आयतन को स्थिर रखते हुए इसके दाब को P_1 से P_2 में परिवर्तित करते हैं। इससे गैस (P_2, V_2) अवस्था में पहुँच जाती है। विकल्पतः हम पहले आयतन को स्थिर रख सकते हैं और फिर दबाव स्थिर रखते हैं। चूंकि U एक अवस्था चर है, ΔU केवल प्रारंभिक व अंतिम अवस्थाओं पर निर्भर करेगा न कि उस पथ पर जिससे गैस एक अवस्था से दूसरी अवस्था में पहुँचती है। यद्यपि, ΔQ तथा ΔW दोनों, सामान्यतया, उस पथ पर निर्भर करते हैं जिससे गैस प्रारंभिक अवस्था से अंतिम अवस्था में जाती है। ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम, समीकरण (11.2), से यह स्पष्ट है कि संयोजन $\Delta Q - \Delta W$ पथ पर निर्भर नहीं करता। इससे पता चलता है कि यदि कोई निकाय ऐसी प्रक्रिया अपनाता है जिसमें $\Delta U = 0$ (उदाहरणार्थ, आदर्श गैस का समतापीय प्रसार, अनुभाग 11.8 देखिए), तो

$$\Delta Q = \Delta W$$

अर्थात् निकाय को दी गई ऊष्मा निकाय द्वारा परिवेश पर कार्य करने में पूर्ण रूप से उपयोग में आ जाती है ।

यदि निकाय सिलिंडर में भरी गैस है तथा सिलिंडर में गतिशील पिस्टन लगा है तो पिस्टन को गति देने में गैस को कार्य करना पड़ता है । चूंकि बल को दाब ×क्षेत्रफल के रूप में परिभाषित करते हैं तथा क्षेत्रफल ×विस्थापन को आयतन कहते हैं तो स्थिर दाब P के विरुद्ध निकाय द्वारा संपादित कार्य निम्नलिखित होगा,

$$\Delta W = P\Delta V$$

यहाँ ΔV गैस में आयतन के परिवर्तन को व्यक्त करता है । अतः इस उदाहरण के लिए, समीकरण (11.20) निम्न प्रकार से लिखी जाएगी

$$\Delta Q = \Delta U + P\Delta V \qquad (11.3)$$

समीकरण (11.3) के अनुप्रयोग के रूप में हमें 1g जल की आंतरिक ऊर्जा के परिवर्तन पर विचार करना होगा जब यह अपनी द्रव प्रावस्था से वाष्प प्रावस्था में परिवर्तित होता है । जल की मापी गई गुप्त ऊष्मा 2256 J/g है अर्थात् जल के 1 ग्राम के लिए ΔQ = 2256 J होता है । वायुमंडलीय दाब पर, 1 g जल का आयतन द्रव प्रावस्था में 1 cm^3 तथा वाष्प प्रावस्था में 1671 cm^3 होता है । अतः

$$\Delta W = P(V_g - V_l) = 1.013 \times 10^5 \times (1671 \times 10^{-6}) = 169.2 \text{ J}$$

समीकरण (11.3) से हमें आंतरिक ऊर्जा का मान प्राप्त होता है,

$$\Delta U = 2256 - 169.2 = 2086.8 \text{ J}$$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि ऊष्मा का अधिकांश भाग जल की आंतरिक ऊर्जा में वृद्धि करने में व्यय होता है । इस प्रक्रिया में जल द्रव से वाष्प प्रावस्था में परिवर्तित होता है ।

11.6 विशिष्ट ऊष्मा धारिता

कल्पना कीजिए कि किसी पदार्थ को दी गई ऊष्मा की मात्रा ΔQ उसके ताप को T से बढ़ाकर $T+\Delta T$ कर देती है । हम पदार्थ की ऊष्मा धारिता को निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित करते हैं ।

$$S = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad (11.4)$$

हम आशा करते हैं कि ΔQ और इस प्रकार से ऊष्मा धारिता S पदार्थ के द्रव्यमान के अनुक्रमानुपाती होती है । इसके अतिरिक्त यह ताप पर भी निर्भर कर सकती है । अर्थात् भिन्न-भिन्न तापों पर पदार्थ के ताप में एकांक वृद्धि के लिए ऊष्मा के भिन्न-भिन्न परिमाणों की आवश्यकता पड़ सकती है । पदार्थ के किसी नियत अभिलक्षण को परिभाषित करने तथा उसे उसके परिमाण से स्वतंत्र रखने के लिए हम S को पदार्थ के द्रव्यमान m (kg में) से विभाजित कर देते हैं :

$$s = \frac{S}{m} = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad (11.5)$$

s को पदार्थ की **विशिष्ट ऊष्मा धारिता** कहते हैं । यह पदार्थ की प्रकृति और उसके ताप पर निर्भर करती है । विशिष्ट ऊष्मा का मात्रक J kg^{-1} K^{-1} है।

यदि पदार्थ के परिमाण का निर्धारण μ मोल (द्रव्यमान m को kg में व्यक्त करने के स्थान पर) के पदों में करें तो हम पदार्थ की ऊष्मा धारिता प्रति मोल को इस प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं

$$C = \frac{S}{\mu} = \frac{1}{\mu} = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad (11.6)$$

C को पदार्थ की **मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता** कहते हैं । s की भांति C भी पदार्थ के परिमाण पर निर्भर नहीं करता तथा प्रदत्त ऊष्मा की परिस्थितियों, पदार्थ की प्रकृति, उसके ताप पर निर्भर करता है । C का मात्रक J mol^{-1} K^{-1} है । जैसा कि हम बाद में देखेंगे (गैस की विशिष्ट ऊष्मा के संबंध में) C या s को परिभाषित करने के लिए अतिरिक्त शर्तो की आवश्यकता पड़ सकती है । C को परिभाषित करने के पीछे यह विचार है कि मोलर विशिष्ट ऊष्माओं के संबंध में सरल भविष्यवाणियाँ की जा सकती हैं।

सारणी 11.1 में कमरे के ताप तथा वायुमंडलीय दाब पर कुछ ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता तथा मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता दी गई हैं।

हम अध्याय 12 में पढ़ेंगे कि गैसों की विशिष्ट ऊष्माओं के संबंध में की गई भविष्यवाणियाँ सामान्यतया प्रयोग से मेल खाती हैं । हम उसी ऊर्जा सम विभाजन नियम का उपयोग कर सकते हैं । जैसा कि हमने वहाँ ठोसों की मोलर विशिष्ट ऊष्मा की भविष्यवाणी में किया है (खंड 12.5 और 12.6 देखें)। N परमाणुओं वाले किसी ठोस पर विचार करें । प्रत्येक परमाणु अपनी माध्य स्थिति के दोनों ओर कंपन करता है । एक विमा में किसी दोलक की माध्य ऊर्जा $2 \times ½\, k_B T = k_B T$ होगी । तीन विमाओं में माध्य ऊर्जा $3\, k_B T$ होगी । ठोस के एक मोल के लिए कुल ऊर्जा

$$U = 3\, k_B T \times N_A = 3\, RT \quad (\; k_B N_A = R\,)$$

अब स्थिर दाब पर, $\Delta Q = \Delta U + P\Delta V \cong \Delta U$ होगा, क्योंकि किसी ठोस के लिए ΔV नगण्य होगा । अतः

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} = 3\,R \qquad (11.7)$$

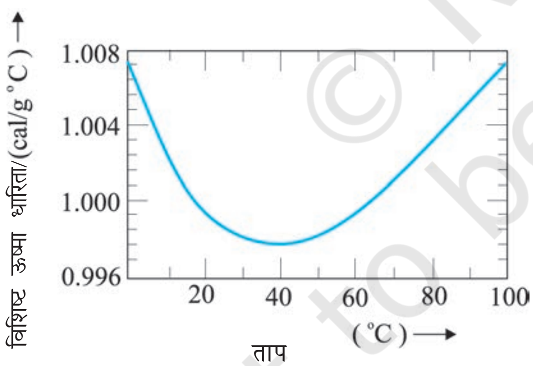
सारणी 11.1 कमरे के ताप तथा वायुमंडलीय दाब पर कुछ ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता तथा मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता

पदार्थ	विशिष्ट ऊष्मा धारिता ($J kg^{-1} K^{-1}$)	मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता ($J mol^{-1} K^{-1}$)
ऐलुमिनियम	900.0	24.4
कार्बन	506.5	6.1
ताँबा	386.4	24.5
सीसा	127.7	26.5
चाँदी	236.1	25.5
टंगस्टन	134.4	24.9

जैसा कि सारणी से स्पष्ट है कि भविष्यवाणियाँ सामान्यतया साधारण तापों पर प्रायोगिक मानों से मेल खाती हैं (कार्बन एक अपवाद है)। यह ज्ञात है कि यह मेल निम्न तापों पर भंग हो जाता है।

जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता

ऊष्मा का पुराना मात्रक कैलोरी था। 1 कैलोरी को ऊष्मा के उस परिमाण के रूप में परिभाषित करते थे जो 1g जल के ताप में 1°C की वृद्धि कर दे। अधिक परिशुद्ध मापों से यह पाया गया है कि जल की विशिष्ट ऊष्मा में ताप के साथ किंचितमात्र परिवर्तन होता है। चित्र 11.5 में ताप परिसर 0-100 °C में यह परिवर्तन दर्शाया गया है।



चित्र 11.5 *ताप के साथ जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता में परिवर्तन*

इसलिए कैलोरी की यथार्थ परिभाषा के लिए यह आवश्यक समझा गया कि एकांक ताप अंतराल को निर्धारित किया जाए। ऊष्मा का वह परिमाण जो 1 g जल के ताप में 1 °C (14.5 °C से 15.5 °C) की वृद्धि कर दे, उसे 1 कैलोरी के रूप में परिभाषित किया गया। चूंकि ऊष्मा ऊर्जा का ही एक रूप है, इसलिए मात्रक जूल, J के उपयोग को प्राथमिकता देना अधिक उपयुक्त है। SI मात्रकों में, जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता 4186 $J kg^{-1} K^{-1}$ अर्थात् 4.186 $J g^{-1} K^{-1}$ है। तथाकथित ऊष्मा का यांत्रिक तुल्यांक, जिसे 1 कैलोरी ऊष्मा उत्पन्न करने के लिए आवश्यक कार्य के रूप में परिभाषित करते हैं, वास्तव में ऊर्जा के दो भिन्न मात्रकों (कैलोरी से जूल) के मध्य एक परिवर्तन गुणक है। चूंकि SI मात्रक पद्धति में ऊष्मा कार्य या ऊर्जा के किसी अन्य रूप के लिए जूल मात्रक का उपयोग करते हैं, अत: 'यांत्रिक तुल्यांक' पद अब निरर्थक हो गया है और इसे उपयोग में लाने की आवश्यकता नहीं है।

जैसा कि पहले वर्णन किया जा चुका है कि विशिष्ट ऊष्मा धारिता, प्रक्रिया या उन परिस्थितियों पर निर्भर करती है जिनके अंतर्गत ऊष्मा का स्थानांतरण होता है। उदाहरणार्थ, गैसों के लिए हम दो विशिष्ट ऊष्माओं को परिभाषित करते हैं : ***स्थिर आयतन पर विशिष्ट ऊष्मा धारिता तथा स्थिर दाब पर विशिष्ट ऊष्मा धारिता।*** किसी आदर्श गैस के लिए हमारे पास एक सरल संबंध होता है जिसे हम निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त करते हैं :

$$C_P - C_V = R \qquad (11.8)$$

यहाँ C_P व C_V आदर्श गैस की क्रमशः स्थिर दाब व स्थिर आयतन पर मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिताएँ हैं तथा R सार्वत्रिक गैस नियतांक है। इसे सिद्ध करने के लिए हम 1 मोल गैस के लिए समीकरण (11.3) पर विचार करते हैं :

$$\Delta Q = \Delta U + P\Delta V$$

यदि ΔQ का स्थिर आयतन पर अवशोषण होता है तो $\Delta V = 0$ होगा।

$$C_v = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_v = \left(\frac{\Delta U}{\Delta T}\right)_v \equiv \left(\frac{\Delta U}{\Delta T}\right) \qquad (11.9)$$

यहाँ अधोलिखित V को अंतिम पद में छोड़ दिया गया है क्योंकि आदर्श गैस के लिए U का मान मात्र ताप पर निर्भर करता है। (अधोलिखित यह व्यक्त करता है कि तत्संबंधित राशि स्थिर है।) इसके विपरीत, यदि ΔQ का स्थिर दाब पर अवशोषण होता है तो

$$C_p = \frac{\Delta Q}{\Delta T}_p = \frac{\Delta U}{\Delta T}_p + P\frac{\Delta V}{\Delta T}_p \qquad (11.10)$$

अधोलिखित P को प्रथम पद में छोड़ा जा सकता है क्योंकि आदर्श गैस के लिए U का मान मात्र T पर निर्भर करता है। आदर्श गैस के 1 मोल के लिए

$$PV = RT$$

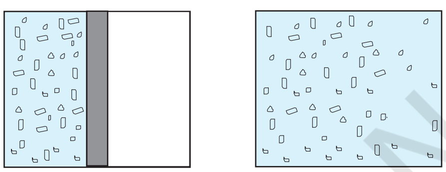
जो निम्नलिखित परिणाम देता है :

$$P\left(\frac{\Delta V}{\Delta T}\right)_P = R \qquad (11.11)$$

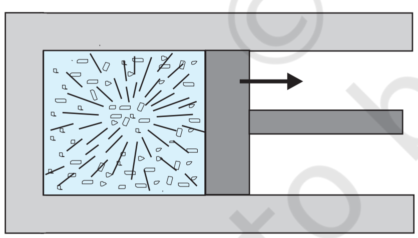
समीकरणों (11.9) से (11.11) तक के उपयोग से हमें वांछित संबंध (11.8) प्राप्त होता है।

11.7 ऊष्मागतिकीय अवस्था चर तथा अवस्था का समीकरण

किसी भी ऊष्मागतिकीय निकाय की प्रत्येक **साम्य अवस्था** को कुछ स्थूल चरों के विशिष्ट मानों के उपयोग द्वारा पूरी तरह से वर्णित कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, किसी गैस की साम्य अवस्था उसके दाब, आयतन, ताप व द्रव्यमान (तथा संगठन यदि गैसों का सम्मिश्रण है) के मानों द्वारा पूरी तरह से निर्धारित होती है। कोई ऊष्मागतिक निकाय सदैव साम्य स्थिति में नहीं होता। उदाहरणार्थ, किसी गैस को निर्वात के विरुद्ध यदि फैलने दिया जाता है तो यह साम्य अवस्था नहीं होती [चित्र 11.6(a)]। द्रुत प्रसरण की अवधि में गैस का दाब संभव है कि सभी स्थानों पर एकसमान न हो। इसी प्रकार, गैसों का वह सम्मिश्रण जिसमें विस्फोटक रासायनिक अभिक्रिया होती है (उदाहरणार्थ, पेट्रोल की वाष्प तथा वायु का मिश्रण जिसे एक चिंगारी से प्रज्ज्वलित किया जाता है) एक साम्य अवस्था नहीं है; इसके अतिरिक्त इसके ताप व दाब एकसमान नहीं हैं [चित्र 11.6(b)]। अंततः, गैस का ताप व दाब एकसमान हो जाता है तथा वह परिवेश के साथ तापीय व यांत्रिक साम्य में आ जाती है।



(a)



(b)

चित्र 11.6 (a) बॉक्स के विभाजक को अचानक हटा दिया गया है जिससे गैस का मुक्त प्रसरण होता है। (b) गैसों का मिश्रण जिसमें विस्फोटक रासायनिक अभिक्रिया संपन्न होती है। दोनों स्थितियों में गैस साम्यावस्था में नहीं है तथा चरों से इसका विवरण नहीं दिया जा सकता।

संक्षेप में, ऊष्मागतिकीय अवस्था चर निकायों की साम्यावस्था का विवरण देते हैं। यह आवश्यक नहीं है कि विभिन्न अवस्था चर स्वतंत्र हों। अवस्था चरों के पारस्परिक संबंध को अवस्था का समीकरण कहते हैं। उदाहरणार्थ, किसी आदर्श गैस के लिए अवस्था का समीकरण आदर्श गैस संबंध होता है,

$$PV = \mu RT$$

गैस की निश्चित मात्रा के लिए अर्थात् दिए गए μ के लिए इस प्रकार से केवल दो ही स्वतंत्र चर होते हैं। मान लीजिए कि वे P और V या T और V हैं। निश्चित ताप पर दाब आयतन वक्र को **समतापी** कहते हैं। वास्तविक गैसों के लिए अवस्था का समीकरण अधिक जटिल हो सकता है।

ऊष्मागतिकीय अवस्था चर दो प्रकार के होते हैं : **विस्तीर्ण** तथा **गहन**। विस्तीर्ण चर निकाय के आकार का संकेत देते हैं जबकि गहन चर जैसे दाब तथा ताप से ऐसा नहीं करते। यह निर्णय लेने के लिए कि कौन-सा चर विस्तीर्ण है तथा कौन-सा गहन है, किसी प्रासंगिक निकाय पर विचार कीजिए तथा कल्पना कीजिए कि उसे दो समान भागों में बाँट दिया गया है। वे चर जो हर भाग में अपरिवर्तित रहते हैं गहन चर कहलाते हैं किंतु जिन चरों का मान हर भाग में आधा हो जाता है, उन्हें विस्तीर्ण चर कहते हैं। उदाहरणार्थ, यह आसानी से देखा जा सकता है कि आंतरिक ऊर्जा U, आयतन V, कुल द्रव्यमान M विस्तीर्ण चर हैं जबकि दाब P, ताप T व घनत्व ρ गहन चर हैं। यह एक अच्छी आदत होगी यदि चरों के इस प्रकार के वर्गीकरण के द्वारा ऊष्मागतिकीय समीकरणों की प्रासंगिकता का परीक्षण कर लिया जाए। उदाहरणार्थ, समीकरण,

$$\Delta Q = \Delta U + P\Delta V$$

में दोनों ओर की राशियाँ विस्तीर्ण है* (किसी गहन चर जैसे P तथा विस्तीर्ण राशि ΔV का गुणनफल विस्तीर्ण राशि है)।

11.8 ऊष्मागतिकीय प्रक्रम

11.8.1 स्थैतिककल्प प्रक्रम

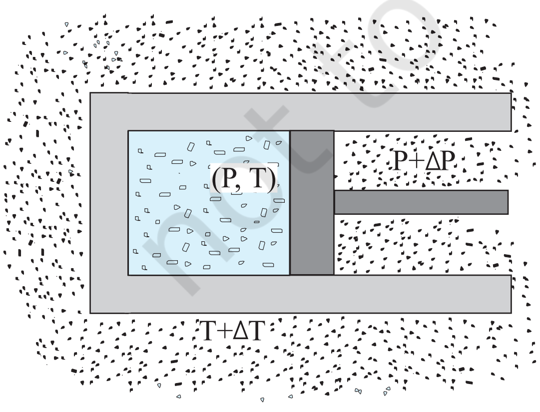
ऐसी गैस पर विचार कीजिए जो अपने परिवेश से तापीय तथा यांत्रिक रूप से साम्य में हो। ऐसी स्थिति में गैस का दाब बाह्य दाब के बराबर होगा तथा इसका ताप वही होगा जो परिवेश का है। कल्पना कीजिए कि बाह्य दाब को यकायक कम कर देते हैं (मान लीजिए कि बर्तन में लगे गतिशील पिस्टन से भार हटा लेते हैं)। पिस्टन बाहर की ओर त्वरित होगा। प्रक्रम की अवधि में गैस उन अवस्थाओं से गुजरती है जो साम्यावस्थाएँ नहीं हैं। असाम्य अवस्थाओं का सुनिश्चित दाब व ताप नहीं होता। इसी प्रकार, यदि गैस व उसके परिवेश के मध्य सीमित तापांतर है, तो ऊष्मा का विनिमय द्रुत गति से होता है। इस प्रक्रम में गैस असाम्यावस्था से गुजरती है। यथासमय, गैस संतुलन की अवस्था में पहुँच जाएगी जिसमें सुनिश्चित ताप व दाब परिवेश के ताप व दाब के बराबर हो जाएगा। निर्वात में गैस का स्वतंत्र प्रसार

* जैसा पहले भी दर्शाया गया है Q अवस्था चर नहीं है किन्तु ΔQ निकाय की कुल मात्रा समानुपातिक है। अतः यह विस्तीर्ण चर है।

तथा विस्फोटक रासायनिक अभिक्रिया प्रदर्शित करने वाली गैसों का सम्मिश्रण (जिसका खंड (11.7) में वर्णन किया गया है) भी ऐसे उदाहरण हैं जिसमें निकाय असाम्यावस्था से गुजरता है।

किसी निकाय की असाम्यावस्था से व्यवहार करना कठिन होता है । इसलिए एक आदर्शीकृत प्रक्रम की कल्पना करना सरल होता है जिसके हर चरण में निकाय एक साम्यावस्था में है । ऐसा प्रक्रम सिद्धांतः अनंत रूप से धीमा होता है । इस कारण इस प्रक्रम को स्थैतिककल्प (लगभग स्थिर) प्रक्रम कहते हैं। यह निकाय अपने चरों (P, T, V) को इतनी धीमी गति से परिवर्तित करता है कि यह पूरी अवधि में अपने परिवेश से तापीय व यांत्रिक साम्य में रहता है । किसी स्थैतिककल्प प्रक्रम के हर चरण में निकाय के दाब तथा उसके बाह्य दाब का अंतर अत्यंत छोटा होता है । यही बात निकाय तथा उसके परिवेश के मध्य तापांतर पर भी लागू होती है । स्थैतिककल्प प्रक्रम के माध्यम से किसी गैस को उसकी अवस्था (P, T) से अन्य अवस्था (P', T') में ले जाते हैं तो हम बाह्य दाब को अत्यल्प मात्रा से परिवर्तित करते हैं तथा इसके दाब को परिवेश के दाब के बराबर हो जाने देते हैं । प्रक्रम को अति धीमी गति से चलने देते हैं जब तक कि निकाय का दाब P' न हो जाए । इसी प्रकार, ताप बदलने के लिए हम निकाय तथा परिवेश के ऊष्मा भंडार के मध्य अत्यन्त सूक्ष्म तापांतर उत्पन्न करते हैं तथा ऊष्मा भंडारों का चयन उत्तरोत्तर भिन्न तापों T से T' का करते हैं। इस प्रकार निकाय का ताप T' हो जाता है ।

स्पष्ट रूप से, स्थैतिककल्प प्रक्रम काल्पनिक रचना है। व्यवहार रूप से उन प्रक्रमों को, जो बहुत ही धीमे हैं, जिनके पिस्टन में त्वरित गति नहीं होती तथा जिनमें अधिक ताप प्रवणता नहीं होती, इन्हें आदर्श स्थैतिककल्प प्रक्रम मानना तर्कसंगत है। यदि अन्य बात का वर्णन न किया जाए तो हम अब स्थैतिककल्प प्रक्रमों के विषय में ही अध्ययन करेंगे।



चित्र 11.7 स्थैतिककल्प प्रक्रम में परिवेश के पात्र का ताप तथा बाह्य दाब एवं निकाय के ताप व दाब का अंतर अत्यल्प है ।

वह प्रक्रम जिसकी पूरी अवधि में निकाय का ताप स्थिर रखा जाता है, **समतापीय प्रक्रम** कहलाता है । स्थिर ताप के किसी विशाल ऊष्मा भंडार में रखे धात्विक सिलिंडर में प्रसरित हो रही गैस समतापीय प्रक्रम का एक उदाहरण है । (ऊष्मा भंडार से निकाय में ऊष्मा के स्थानांतरण से ऊष्माशय का ताप यथार्थ रूप से प्रभावित नहीं होता, क्योंकि उसकी ऊष्माधारिता अत्यधिक होती है) । **समदाबीय प्रक्रम** में दाब स्थिर रहता है जबकि **समआयतनिक प्रक्रम** में आयतन स्थिर रहता है। अंततः, यदि निकाय को परिवेश से ऊष्मारुद्ध कर दिया जाए तथा निकाय व परिवेश के मध्य ऊष्मा प्रवाहित न हो, तो प्रक्रम **रुद्धोष्म** होता है । इन विशेष प्रक्रमों की परिभाषाओं का सार सारणी 11.2 में प्रस्तुत किया गया है ।

सारणी 11.2 कुछ विशिष्ट ऊष्मागतिकीय प्रक्रम

प्रक्रमों का प्रकार	विशेषता
समतापीय	स्थिर ताप
समदाबीय	स्थिर दाब
समआयतनिक	स्थिर आयतन
रुद्धोष्म	निकाय व परिवेश के मध्य ऊष्मा प्रवाह नहीं ($\Delta Q = 0$)

अब हम इन प्रक्रमों के विषय में विस्तार से अध्ययन करेंगे।

11.8.2 समतापीय प्रक्रम

किसी समतापीय प्रक्रम में (जिसमें T स्थिर है) आदर्श गैस समीकरण से निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है

$$PV = \text{नियतांक}$$

अर्थात् किसी निश्चित द्रव्यमान की गैस का दाब उसके आयतन का व्युत्क्रमानुपाती होता है । यह और कुछ नहीं वरन् बॉयल का नियम है ।

कल्पना कीजिए कि कोई आदर्श गैस समतापीय (ताप T पर) रूप से अपनी प्रारंभिक (P_1, V_1) से अंतिम अवस्था (P_2, V_2) में पहुँचती है । बीच के किसी चरण में जब दाब P हो तथा आयतन में परिवर्तन V से $V + \Delta V$ (ΔV कम) हो, तो

$$\Delta W = P\Delta V$$

$\Delta V \to 0$ लेते हुए राशि ΔW को संपूर्ण प्रक्रम में जोड़कर कार्य की कुल मात्रा निम्नलिखित रूप से ज्ञात कर लेते हैं,

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV$$

$$= \mu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \mu RT \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad (11.12)$$

दूसरे चरण में हमने आदर्श गैस समीकरण $PV = \mu RT$ का उपयोग किया है तथा अचरों को समाकलन से बाहर ले लिया है । आदर्श गैस के लिए आंतरिक ऊर्जा ताप पर निर्भर करती है । इस प्रकार, किसी आदर्श गैस के समतापीय प्रक्रम में आंतरिक ऊर्जा में कोई परिवर्तन नहीं होता । इसलिए ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम के अनुसार, गैस को दी गई ऊष्मा की मात्रा गैस द्वारा संपादित किए गए कार्य के बराबर होती है : $Q = W$ । समीकरण (11.12) में ध्यान दीजिए कि जब $V_2 > V_1$ तो $W > 0$; तथा $V_2 < V_1$ के लिए $W < 0$ होता है । इसका तात्पर्य यह है कि समतापीय प्रसार में गैस ऊष्मा अवशोषित करके कुछ कार्य संपादित करती है जबकि समतापीय संपीडन में गैस पर परिवेश द्वारा कार्य होता है तथा ऊष्मा का निष्कासन होता है ।

11.8.3 रुद्धोष्म प्रक्रम

रुद्धोष्म प्रक्रम में निकाय को परिवेश से ऊष्मारुद्ध कर देते हैं फलस्वरूप अवशोषित या निष्कासित ऊष्मा शून्य होती है । समीकरण (11.1) से पता चलता है कि गैस द्वारा संपादित कार्य के फलस्वरूप आंतरिक ऊर्जा कम हो जाती है (और इस प्रकार आदर्श गैस के लिए उसका ताप) । यहाँ हम बिना उपपत्ति के इस तथ्य का उल्लेख कर रहे हैं (जिसका आप उच्च कक्षाओं में अध्ययन करेंगे) कि आदर्श गैस के लिए रुद्धोष्म प्रक्रम में

$$PV^{\gamma} = \text{नियतांक} \qquad (11.13)$$

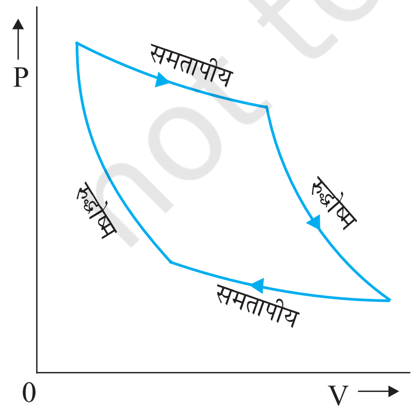
जहाँ γ गैस की दो विशिष्ट ऊष्माओं (सामान्य अथवा मोलर), स्थिर दाब पर विशिष्ट ऊष्मा C_p तथा स्थिर आयतन पर विशिष्ट ऊष्मा C_v का अनुपात है । अर्थात्

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

अतः यदि कोई आदर्श गैस रुद्धोष्म ढंग से (P_1, V_1) अवस्था से (P_2, V_2) अवस्था में पहुँच जाती है, तो

$$P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma} \qquad (11.14)$$

चित्र 11.8 में आदर्श गैस के लिए P-V वक्रों को दो रुद्धोष्म से जोड़ने वाले दो समतापीय को दर्शाया गया है ।



चित्र 11.8 आदर्श गैस के समतापीय व रुद्धोष्म प्रक्रमों के लिए P-V वक्र ।

किसी आदर्श गैस की अवस्था (P_1, V_1, T_1) से अवस्था (P_2, V_2, T_2) में रुद्धोष्म परिवर्तन में होने वाले कार्य को हम पहले ही की भांति परिकलित कर सकते हैं । अर्थात्,

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P \, dV$$

$$= \text{नियतांक} \times \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^{\gamma}} = \text{नियतांक} \times \left. \frac{V^{-\gamma+1}}{1-\gamma} \right|_{V_1}^{V_2}$$

$$= \frac{\text{नियतांक}}{1-\gamma} \times \left[\frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}} \right] \qquad (11.15)$$

समीकरण (11.14), से नियतांक $P_1 V_1^{\gamma}$ है अथवा $P_2 V_2^{\gamma}$

$$\therefore \quad W = \frac{1}{1-\gamma} \times \left[\frac{P_2 V_2^{\gamma}}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{P_1 V_1^{\gamma}}{V_1^{\gamma-1}} \right]$$

$$= \frac{1}{1-\gamma} \left[P_2 V_2 - P_1 V_1 \right] = \frac{\mu R (T_1 - T_2)}{\gamma - 1} \qquad (11.16)$$

जैसा अपेक्षित है, यदि रुद्धोष्म प्रक्रम में कार्य गैस द्वारा संपन्न होता है ($W > 0$), तब समीकरण (11.16) से $T_2 > T_1$ । इसके विपरीत, यदि कार्य गैस पर संपादित होता है ($W < 0$) तो, हमें $T_2 > T_1$ प्राप्त होता है, अर्थात् गैस का ताप बढ़ता है ।

11.8.4 समआयतनिक प्रक्रम

किसी समआयतनिक प्रक्रम में V नियत रहता है । इस प्रक्रम में न तो गैस पर कोई कार्य होता है और न ही गैस द्वारा कोई कार्य संपादित होता है । समीकरण (11.1) से गैस द्वारा अवशोषित ऊष्मा पूर्ण रूप से उसकी आंतरिक ऊर्जा तथा उसके ताप को परिवर्तित करने में व्यय होती है । किसी दी गई ऊष्मा की मात्रा के लिए ताप में परिवर्तन नियत आयतन पर गैस की विशिष्ट ऊष्मा द्वारा निर्धारित की जाती है।

11.8.5 समदाबीय प्रक्रम

समदाबीय प्रक्रम में दाब P नियत रहता है । गैस द्वारा किया गया कार्य

$$W = P(V_2 - V_1) = \mu R (T_2 - T_1) \qquad (11.17)$$

चूंकि ताप परिवर्तित होता है, अतः आंतरिक ऊर्जा भी परिवर्तित होती है । अवशोषित ऊष्मा आंशिक रूप से आंतरिक ऊर्जा में वृद्धि करने में तथा आंशिक रूप से कार्य करने में व्यय होती है । किसी नियत ऊष्मा की मात्रा के लिए ताप में परिवर्तन नियत दाब पर गैस की विशिष्ट ऊष्मा द्वारा निर्धारित किया जाता है ।

11.8.6 चक्रीय प्रक्रम

चक्रीय प्रक्रम में निकाय अपनी प्रारंभिक अवस्था में वापस लौट आता है । चूंकि आंतरिक ऊर्जा अवस्था चर है, चक्रीय प्रक्रम के लिए ΔU=0 । समीकरण (11.1) से, अवशोषित ऊष्मा की कुल मात्रा निकाय द्वारा किए गए कार्य के बराबर होती है ।

11.9 ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम

ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम ऊर्जा संरक्षण नियम है । सामान्य अनुभव यह बतलाता है कि ऐसे बहुत से मनोगम्य प्रक्रम हैं जो ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम से पूर्णतया अनुमत हैं तथापि कभी भी होते हुए दिखाई नहीं देते । उदाहरणार्थ, ऐसा किसी ने कभी नहीं देखा कि मेज पर पड़ी कोई पुस्तक स्वत: उछलकर किसी ऊँचाई पर पहुँच जाए । किंतु ऐसी बात तभी संभव हो सकती है यदि केवल ऊर्जा संरक्षण नियम का ही नियंत्रण हो । मेज स्वत: ठंडी होकर अपनी आंतरिक ऊर्जा का कुछ अंश पुस्तक की समान मात्रा की यांत्रिक ऊर्जा में रूपांतरित करने में करे और इस यांत्रिक ऊर्जा के कारण पुस्तक उस ऊँचाई तक उछले जिसकी स्थितिज ऊर्जा पुस्तक द्वारा प्राप्त यांत्रिक ऊर्जा के बराबर हो । परंतु ऐसा कदापि नहीं होता। स्पष्ट है कि प्रकृति के किसी आंतरिक मूल नियम के कारण यह निषेध है। यद्यपि यह ऊर्जा संरक्षण नियम का अनुपालन करता है। वह नियम जो ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम से संगत अनेक परिघटनाओं को स्वीकृति नहीं देता, ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम कहलाता है ।

ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम किसी ऊष्मा इंजन की दक्षता तथा किसी प्रशीतक के निष्पादन गुणांक की मूल सीमा निर्धारित करता है। सरल भाषा में, यह नियम बताता है कि ऊष्मा इंजन की दक्षता कदापि 1 नहीं हो सकती। ठंडे ऊष्मा भंडार की मुक्त ऊष्मा को कभी भी शून्य नहीं किया जा सकता। प्रशीतक के लिए द्वितीय नियम यह बताता है कि निष्पादन गुणांक कदापि अनंत नहीं हो सकता। प्रशीतक पर बाह्य कार्य (W) कभी भी शून्य नहीं हो सकता। अधोलिखित दोनों प्रकथन, इन प्रेक्षणों का एक संक्षिप्त सार है। उनमें से एक केल्विन तथा प्लैंक के द्वारा दिया गया है जिसके अनुसार, किसी आदर्श ऊष्मा इंजन की संभावना का खंडन किया गया है, तथा दूसरा क्लासियस द्वारा दिया गया है जिसके अनुसार, किसी आदर्श प्रशीतक अथवा ऊष्मा पंप की संभावना का खंडन किया गया है।

केल्विन-प्लैंक का प्रकथन

ऐसा कोई प्रक्रम संभव नहीं है जिसका एकमात्र परिणाम किसी ऊष्मा भंडार से ऊष्मा का अवशोषण करना तथा उस ऊष्मा को पूर्णतया कार्य में रूपांतरित करना हो ।

क्लासियस का प्रकथन

ऐसा कोई भी प्रक्रम संभव नहीं है जिसका एकमात्र परिणाम किसी ठंडे पिंड से किसी गर्म पिंड में ऊष्मा स्थानांतरण हो ।

उच्च कक्षाओं के पाठ्यक्रमों में आप इसकी उपपत्ति पढ़ेंगे कि दोनों प्रकथन पूर्णतया समतुल्य हैं ।

11.10 उत्क्रमणीय व अनुत्क्रमणीय प्रक्रम

किसी ऐसे प्रक्रम की कल्पना कीजिए जिसमें कोई ऊष्मागतिकीय निकाय आरंभिक अवस्था i से अंतिम अवस्था f में पहुँचता है। प्रक्रम में निकाय परिवेश से Q ऊष्मा अवशोषित करता है तथा उस पर W कार्य संपादित करता है। क्या हम इस प्रक्रम को उलट सकते हैं तथा निकाय व परिवेश दोनों को, कहीं भी कोई अन्य प्रभाव पड़े बिना, आरंभिक अवस्था में वापस ला सकते हैं? अनुभव बताता है कि प्रकृति के अधिकांश प्रक्रमों में ऐसा होना संभव नहीं है। प्रकृति में सभी नैसर्गिक प्रक्रम अनुत्क्रमणीय हैं। इनके अनेक उदाहरण गिनाये जा सकते हैं। चूल्हे पर रखे बर्तन का आधार दूसरे भागों की अपेक्षा अधिक गरम होता है। जब बर्तन को हटाते हैं तो ऊष्मा आधार से दूसरे भागों में स्थानांतरित होती है जिससे बर्तन का ताप एकसमान हो जाता है (यथोचित समय में यह परिवेश के ताप के बराबर ठंडा हो जाता है)। इस प्रक्रम को उत्क्रमित नहीं किया जा सकता, बर्तन का कोई भाग स्वत: ठंडा होकर आधार को गर्म नहीं करेगा। यदि ऐसा होता है तो ऊष्मागतिकी के द्वितीय नियम का उल्लंघन होगा। गैस का मुक्त प्रसार अनुत्क्रमणीय होता है। वायु तथा पेट्रोल के मिश्रण में स्फुलिंग द्वारा प्रज्वलित दहन अभिक्रिया को उत्क्रमित नहीं किया जा सकता। रसोईघर में किसी गैस सिलिंडर से रिस रही भोजन पकाने की गैस पूरे कमरे में विसरित हो जाती है। विसरण प्रक्रम स्वत: उत्क्रमित नहीं होगा जिससे गैस वापस सिलिंडर में भर जाए। किसी ऊष्मा भंडार के ऊष्मीय संपर्क में आने वाले द्रव का विलोड़न संपादित हो रहे कार्य को ऊष्मा में रूपांतरित कर देगा जिससे उष्माशय की आंतरिक ऊर्जा बढ़ जाती है। प्रक्रम को पूर्णतया उत्क्रमित नहीं कर सकते, अन्यथा इसका अर्थ होगा कि ऊष्मा पूर्णतया कार्य में परिवर्तित हो गई है। यह ऊष्मागतिकी के दूसरे नियम का उल्लंघन है। अनुत्क्रमणीयता एक नियम है न कि प्रकृति में कोई अपवाद।

अनुत्क्रमणीयता मुख्यत: दो कारणों से उत्पन्न होती है : पहला, अनेक प्रक्रम (जैसे मुक्त प्रसरण या विस्फोटक रासायनिक अभिक्रिया) निकाय को असंतुलन की अवस्थाओं में ले जाते हैं; दूसरा, अनेक प्रक्रमों में घर्षण, श्यानता तथा अन्य क्षय संबंधी प्रभाव निहित होते हैं (इसके उदाहरण हैं – किसी गतिमान पिंड का रुकना जिसमें पिंड अपनी यांत्रिक ऊर्जा को फर्श व स्वयं अपनी ऊष्मा के रूप में दे देता है; द्रव में घूमते हुए ब्लेड का श्यानता के कारण रुक जाना जिसमें यह अपनी यांत्रिक ऊर्जा को द्रव की आंतरिक ऊर्जा के रूप में दे देता है)। चूंकि क्षयकारी प्रभाव सभी स्थानों पर उपस्थित रहते हैं। इन्हें कम तो किया जा सकता है पर पूर्णतया समाप्त नहीं किया जा सकता। जिन प्रक्रमों से हमारा अधिकतर सामना होता है वे सभी अनुत्क्रमणीय होते हैं।

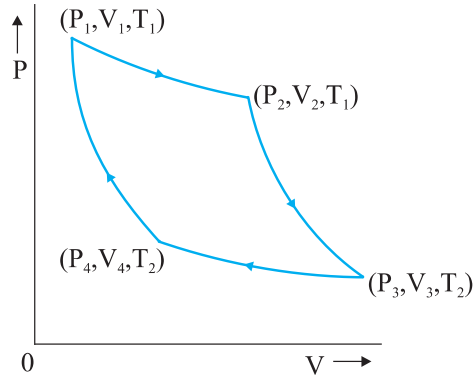
कोई ऊष्मागतिकीय प्रक्रम (अवस्था $i \rightarrow$ अवस्था f) तभी उत्क्रमणीय होता है यदि उसे इस प्रकार वापस लौटाया जा सके कि निकाय व परिवेश दोनों अपनी प्रारंभिक अवस्थाओं में वापस आ जाएँ तथा परिवेश में कहीं भी किसी भी प्रकार का अन्य परिवर्तन न हो। पूर्व विवेचना के अनुसार कोई उत्क्रमणीय प्रक्रम एक आदर्श धारणा है। कोई प्रक्रम उत्क्रमणीय तभी होता है जब वह स्थैतिककल्प होता है (परिवेश के साथ प्रत्येक चरण पर साम्य निकाय) तथा निकाय में कोई क्षयकारी प्रभाव नहीं होते हैं। उदाहरणार्थ, घर्षणहीन गतिशील पिस्टन लगे सिलिंडर भरी किसी आदर्श गैस का स्थैतिककल्प समतापीय प्रसरण उत्क्रमणीय प्रक्रम है।

उत्क्रमणीयता ऊष्मागतिकी की ऐसी मूल धारणा क्यों है ? जैसा कि हम देख चुके है, ऊष्मागतिकी के महत्त्वों में से एक महत्त्व दक्षता का है जिससे ऊष्मा कार्य में रूपांतरित की जा सकती है। ऊष्मागतिकी का दूसरा नियम 100% दक्षता के आदर्श ऊष्मा इंजन की संभावना को नियम विरुद्ध बताता है। T_1 व T_2 के दो ऊष्मा भंडारों के बीच कार्य करने वाले किसी ऊष्मा इंजन की संभावित अधिकतम दक्षता कितनी होगी ? यह देखा जाता है कि आदर्श उत्क्रमणीय प्रक्रमों पर आधारित ऊष्मा इंजन अधिकतम संभावित दक्षता प्राप्त करता है। अन्य दूसरे इंजनों जिनमें किसी न किसी रूप में अनुत्क्रमणीयता निहित होती है (जैसा कि व्यावहारिक इंजनों में होता है) की दक्षता इस सीमांत दक्षता से कम होती है।

11.11 कार्नो इंजन

कल्पना कीजिए कि हमारे पास ताप T_1 पर एक उष्ण ऊष्मा भंडार व ताप T_2 पर एक ठंडा ऊष्मा भंडार है। इन दोनों ऊष्मा भंडारों के बीच कार्य करने वाले किसी ऊष्मा इंजन की अधिकतम दक्षता कितनी होगी तथा सर्वाधिक दक्षता प्राप्त करने के लिए प्रकर्मों के किस चक्र को अपनाना चाहिए ? फ्रेंच इंजीनियर, साडी कार्नो ने 1824 में सर्वप्रथम इस प्रश्न पर विचार किया। दिलचस्प बात यह है कि कार्नो ने इस प्रश्न का सही उत्तर पा लिया था यद्यपि ऊष्मा और ऊष्मागतिकी की मौलिक अवधारणा को तब तक दृढ़तापूर्वक स्थापित नहीं किया जा सका था।

हम यह आशा करते हैं कि दो तापों के बीच कार्य करने वाला आदर्श इंजन उत्क्रमणीय इंजन है। जैसा कि पहले अनुभागों में बताया जा चुका है, अनुत्क्रमणीयता से दक्षता को कम करने वाले क्षयकारी प्रभाव संबद्ध होते हैं। कोई प्रक्रम तभी उत्क्रमणीय होता है यदि वह स्थैतिककल्प तथा ऊर्जा-संरक्षी हो। हम यह देख चुके हैं कि वह प्रक्रम स्थैतिककल्प नहीं होता है जिसमें निकाय व ऊष्मा भंडार के बीच तापांतर पर्याप्त हो। इसका तात्पर्य यह है कि दो तापों के मध्य कार्य कर रहे किसी उत्क्रमणीय ऊष्मा इंजन में ऊष्मा का अवशोषण (गरम ऊष्मा भंडार से) समतापीय विधि द्वारा होना चाहिए तथा (अपेक्षाकृत



चित्र 11.9 किसी ऊष्मा इंजन के लिए कार्नो चक्र जिसमें कार्यकारी पदार्थ के रूप में आदर्श गैस का उपयोग होता है।

ठंडे ऊष्मा भंडार को) समतापीय विधि द्वारा ऊष्मा मुक्त होनी चाहिए। इस प्रकार, हमने उत्क्रमणीय इंजन के दो चरणों की पहचान की : ताप T_1 पर समतापीय प्रक्रम जिसमें गरम ऊष्मा भंडार से Q_1 ऊष्मा अवशोषित होती है तथा ताप T_2 पर दूसरा समतापीय प्रक्रम जिसमें ठंडे ऊष्मा भंडार को Q_2 ऊष्मा मुक्त होती है। चक्र पूरा होने के लिए इस बात की आवश्यकता है कि हम निकाय को ताप T_1 से T_2 तक ले जाएँ फिर उसे ताप T_2 से T_1 पर वापस ले जाएँ। प्रश्न यह है कि इस उद्देश्य के लिए हमें किन प्रक्रमों का उपयोग करना चाहिए जो उत्क्रमणीय हों ? थोड़े चिंतन से यह पता चल जाता है कि उस उद्देश्य के लिए हम केवल उत्क्रमणीय रुद्धोष्म प्रक्रम ही अपना सकते हैं जिसमें किसी भी ऊष्मा भंडार से ऊष्मा का प्रवाह सम्मिलित नहीं होता। निकाय को एक ताप से दूसरे ताप तक ले जाने के लिए यदि हम कोई अन्य प्रक्रम अपनाते हैं जो रुद्धोष्म नहीं है, मान लीजिए समआयतनिक प्रक्रम, तो हमें ताप परिसर T_2 से T_1 में ऊष्मा भंडार की एक शृंखला की आवश्यकता होगी ताकि यह निश्चित किया जा सके कि हर चरण में प्रक्रम स्थैतिककल्प में है। (हम आपको पुन: याद दिलाते हैं कि किसी स्थैतिककल्प व उत्क्रमणीय प्रक्रम में निकाय व ऊष्मा भंडार के बीच बहुत तापांतर नहीं होना चाहिए)। परंतु हम यहाँ एक ऐसे उत्क्रमणीय इंजन पर विचार कर रहे हैं जो केवल दो तापों के बीच कार्य करता है। इस प्रकार, रुद्धोष्म प्रक्रमों द्वारा निकाय के ताप में T_1 से T_2 तथा इस इंजन के ताप में T_2 से T_1 का परिवर्तन लाना चाहिए।

दो तापों के मध्य कार्य करने वाला कोई उत्क्रमणीय ऊष्मा इंजन **कार्नो इंजन** कहलाता है। हमने अभी विवेचना की है कि इस इंजन में चरणों का क्रम निम्नलिखित होना चाहिए, जो चित्र 11.11 में दर्शाए अनुसार एक चक्र का निर्माण करते हैं, जिसे

कार्नो चक्र कहते हैं। हमने कार्नो इंजन का कार्यकारी पदार्थ एक आदर्श गैस लिया है।

(a) *चरण 1→2* गैस का समतापी प्रसार जिसमें गैस अवस्था (P_1, V_1, T_1) से (P_2, V_2, T_1) में पहुँच जाती है।

ताप T_1 पर ऊष्माशय से अवशोषित ऊष्मा (Q_1) का मान समीकरण (11.12) से दिया जाता है। यह गैस द्वारा परिवेश पर संपादित किए गए कार्य $W_{1\to2}$ के बराबर होता है।

$$W_{1\to2} = Q_1 = \mu R T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \qquad (11.18)$$

(b) *चरण 2→3* (P_2, V_2, T_1) से (P_3, V_3, T_2) अवस्था में गैस का रुद्धोष्म प्रसार। समीकरण (11.16) से गैस द्वारा संपादित हुआ कार्य होगा

$$W_{2\to3} = \frac{\mu R(T_1 - T_2)}{(\gamma - 1)} \qquad (11.19)$$

(c) *चरण 3→4* गैस की अवस्था (P_3, V_3, T_2) से (P_4, V_4, T_2) में समतापी संपीडन।

ताप T_2 पर गैस द्वारा ऊष्माशय को मुक्त की गई ऊष्मा की मात्रा समीकरण (11.12) से प्राप्त होती है। यह परिवेश द्वारा गैस पर संपादित कार्य $W_{3\to4}$ के भी बराबर होती है

$$W_{3\to4} = Q_2 = \mu R T_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right) \qquad (11.20)$$

(d) *चरण 4→1* गैस की अवस्था (P_4, V_4, T_2) से (P_1, V_1, T_1) में रुद्धोष्म संपीडन। समीकरण (11.16) से गैस पर किया गया कार्य

$$W_{4\to1} = \mu R \frac{(T_1 - T_2)}{(\gamma - 1)} \qquad (11.21)$$

समीकरणों (11.18)से (11.21) के उपयोग से एक पूरे चक्र में गैस द्वारा संपादित कुल कार्य की मात्रा,

$$W = W_{1\to2} + W_{2\to3} - W_{3\to4} - W_{4\to1}$$

$$= \mu R T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) - \mu R T_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right) \qquad (11.22)$$

कार्नो इंजन की दक्षता

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$= 1 - \frac{T_2}{T_1} \frac{\ln \frac{V_3}{V_4}}{\ln \frac{V_2}{V_1}} \qquad (11.23)$$

अब चूंकि चरण 2→3 एक रुद्धोष्म प्रक्रम है, इसलिए

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$$

$$\text{अथवा} \quad \frac{V_2}{V_3} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/(\gamma-1)} \qquad (11.24)$$

इसी प्रकार, चूंकि चरण 4→1 भी एक रुद्धोष्म प्रक्रम है, इसलिए

$$T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$$

$$\text{अथवा} \quad \frac{V_1}{V_4} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/(\gamma-1)} \qquad (11.25)$$

समीकरणों (11.24) तथा (11.25) से,

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1} \qquad (11.26)$$

समीकरण (11.26) के उपयोग से समीकरण (11.23) से η का निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है :

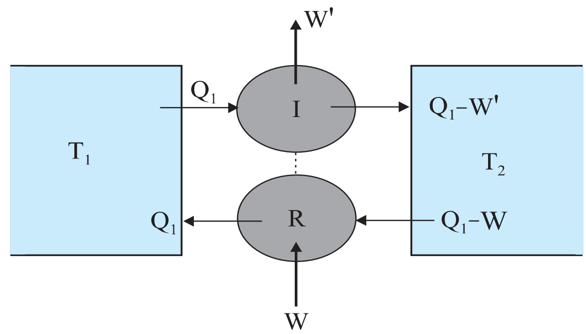
$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \text{ (कार्नो इंजन)} \qquad (11.27)$$

हम जानते हैं कि कार्नो इंजन एक उत्क्रमणीय इंजन है। वास्तव में यही एकमात्र ऐसा इंजन संभव है जो भिन्न तापों के दो ऊष्मा भंडारों के मध्य कार्य करता है। चित्र 11.9 में दर्शाए कार्नो चक्र का हर चरण उत्क्रमित किया जा सकता है। यह उस प्रक्रम के समान होता है, जिसमें T_2 ताप पर ठंडे ऊष्मा भंडार से Q_2 ऊष्मा ली जाती है, निकाय पर W कार्य किया जाता है, तथा गरम ऊष्मा भंडार को Q_1 ऊष्मा स्थानांतरित कर दी जाती है। यह युक्ति एक उत्क्रमणीय प्रशीतक होगी।

अब हम महत्वपूर्ण परिणाम सिद्ध करेंगे (जिसे कभी-कभी **कार्नो प्रमेय** कहते हैं) (a) दिए हुए गरम तथा ठंडे ऊष्माशयों के क्रमशः दो तापों T_1 तथा T_2 के बीच कार्यरत किसी भी इंजन की दक्षता कार्नो इंजन की दक्षता से अधिक नहीं हो सकती है तथा (b) कार्नो इंजन की दक्षता कार्यकारी पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर नहीं करती।

परिणाम (a) को सिद्ध करने के लिए हम कल्पना करते हैं कि एक उत्क्रमणीय (कार्नो) इंजन R तथा एक अनुत्क्रमणीय इंजन I एक ही स्रोत (गरम ऊष्मा भंडार) तथा अभिगम (Sink) (ठंडा ऊष्मा भंडार) के बीच कार्यरत हैं। अब हम इन दोनों इंजनों को इस प्रकार संयोजित करते हैं कि I ऊष्मा इंजन की भांति तथा R प्रशीतक की भांति कार्य करें। कल्पना कीजिए

कि I स्रोत से Q_1 ऊष्मा अवशोषित करता है, W' कार्य प्रदान करता है तथा $Q_1 - W'$ ऊष्मा अभिगम को मुक्त करता है । हम ऐसा समायोजन करते हैं कि R अधिगम से Q_2 ऊष्मा लेकर तथा उस पर जो कार्य $W = Q_1 - Q_2$ किया जाना है, उसे कराकर उतनी ही ऊष्मा Q_1 स्रोत को वापस करता है । मान लीजिए कि $\eta_R < \eta_I$ है । अर्थात् यदि R इंजन की भांति कार्य करता तो वह I की अपेक्षा कम कार्य निर्गत करता। अर्थात् किसी दी गई ऊष्मा Q_1 के लिए $W < W'$ । यदि R प्रशीतक के रूप में कार्य करता, तो इसका तात्पर्य यह होता कि $Q_2 = Q_1 - W > Q_1 - W'$ । इस प्रकार, युक्तिपूर्ण संयोजित $I - R$ निकाय ठंडे ऊष्मा भंडार से $(Q_1 - W) - (Q_1 - W') = W' - W$ ऊष्मा निकालता है तथा एक चक्र में इतनी ही मात्रा का कार्य उसे सौंप देता है (इस पूरे चक्र में स्रोत या अन्यत्र कोई परिवर्तन नहीं होता)। यह ऊष्मागतिकी के द्वितीय नियम से संबंधित केल्विन–प्लैंक के प्रकथन से सर्वथा विपरीत है । इसलिए यह निश्चयपूर्वक कहना कि $\eta_I > \eta_R$ अनुचित है । अतः समान तापों के मध्य कार्यरत किसी भी इंजन की दक्षता कार्नो इंजन की दक्षता से अधिक नहीं हो सकती । इसी प्रकार के एक तर्क की रचना यह दर्शाने के लिए भी की जा सकती है कि ऐसे उत्क्रमणीय इंजन की दक्षता जिसमें एक विशेष कार्यकारी पदार्थ है, उस इंजन की दक्षता से अधिक नहीं हो सकती जिसमें कोई अन्य पदार्थ उपयोग होता है । कार्नो इंजन की अधिकतम दक्षता जो समीकरण (11.27) से दी जाती है, कार्नो चक्र की प्रक्रिया को संपादित करने वाले निकाय की प्रकृति पर निर्भर नहीं करती है । अतः हमारे लिए कार्नो इंजन की दक्षता η के परिकलन के लिए कार्यकारी पदार्थ के रूप में आदर्श गैस का उपयोग न्यायसंगत है । आदर्श गैस की अवस्था समीकरण सरल होती है जिसके कारण η का परिकलन सरल हो जाता है, किंतु η के लिए अंतिम परिणाम, समीकरण (11.27), किसी भी कार्नो इंजन के लिए सही है ।



चित्र 11.10 उत्क्रमणीय प्रशीतक (R) से संयुक्त एक अनुत्क्रमणीय इंजन (I) । यदि $W' > W$, तो इसका आशय यह हुआ कि अवशोषक से $W' - W$ ऊष्मा निकालकर उसे पूर्णतः कार्य में रूपांतरित कर दिया गया है, जो ऊष्मागतिकी के दूसरे नियम के विपरीत है ।

यह अंतिम टिप्पणी दर्शाती है कि कार्नो इंजन के लिए,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \qquad (11.28)$$

एक व्यापक संबंध है जो निकाय की प्रकृति पर निर्भर नहीं करता। यहाँ Q_1 व Q_2 कार्नो इंजन में क्रमशः गरम व ठंडे ऊष्मा भंडारों द्वारा समतापीय ढंग से अवशोषित व मुक्त की गई ऊष्माएँ हैं। किसी वास्तविक सर्वव्यापक ऊष्मागतिकीय ताप मापक्रम को परिभाषित करने के लिए हम समीकरण (11.28) का एक सूत्र के रूप में उपयोग कर सकते हैं । यह तापक्रम कार्नो चक्र में प्रयुक्त निकाय के किन्हीं विशेष गुणधर्मों पर निर्भर नहीं करता। वास्तव में, कार्यकारी पदार्थ के रूप में किसी आदर्श गैस के लिए इस ताप का मान वही है जो खंड 11.9 में उल्लेखित आदर्श गैस ताप का है ।

सारांश

1. ऊष्मागतिकी का शून्यवाँ नियम यह अभिव्यक्त करता है कि "दो निकाय जो किसी तीसरे निकाय के साथ स्वतंत्र रूप से तापीय साम्य में हैं, वे एक-दूसरे के साथ भी तापीय साम्य में होते हैं"। शून्यवाँ नियम ताप की अवधारणा का सूत्रपात करता है ।

2. निकाय की आंतरिक ऊर्जा उसके आण्विक घटकों की गतिज एवं स्थितिज ऊर्जाओं के योग के बराबर होती है । इसमें निकाय की संपूर्ण गतिज ऊर्जा सम्मिलित नहीं होती । ऊष्मा और कार्य किसी निकाय में ऊर्जा स्थानांतरण के दो रूप हैं। निकाय व उसके परिवेश के बीच तापांतर के कारण ऊर्जा का स्थानांतरण ऊष्मा के रूप में होता है । कार्य अन्य साधनों (जैसे गैस भरे सिलिंडर के पिस्टन जिससे कुछ भार संबद्ध है, को ऊपर नीचे करने में) द्वारा उत्पन्न ऊर्जा का स्थानांतरण है । इसमें तापांतर समाहित नहीं होता है ।

3. ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम ऊर्जा संरक्षण का व्यापक नियम है, जो उस निकाय में लागू होता है जिसमें परिवेश को या परिवेश से (ऊष्मा व कार्य द्वारा) ऊर्जा स्थानांतरण हो । यह बताता है कि

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

यहाँ ΔQ निकाय को दी गई ऊष्मा है, ΔW निकाय पर किया गया कार्य है तथा ΔU निकाय की आंतरिक ऊर्जा में परिवर्तन है ।

4. पदार्थ की विशिष्ट ऊष्मा धारिता को हम निम्नलिखित सूत्र द्वारा परिभाषित करते हैं

$$s = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

यहाँ m पदार्थ का द्रव्यमान है तथा ΔQ वह ऊष्मा है जिसके द्वारा पदार्थ के ताप में ΔT की वृद्धि हो जाती है। पदार्थ की मोलीय विशिष्ट ऊष्मा धारिता निम्नांकित सूत्र से परिभाषित की जाती है

$$C = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

μ पदार्थ के मोल की संख्या को व्यक्त करता है । किसी ठोस के लिए ऊर्जा के सम विभाजन के नियम से

$$C = 3\,R$$

जो सामान्यतया साधारण तापों पर किए जाने वाले प्रयोगों से प्राप्त परिणामों से मेल खाता है ।

कैलोरी ऊष्मा का पुराना मात्रक है । 1 कैलोरी ऊष्मा की वह मात्रा है जो 1g जल के ताप में 14.5 °C से 15.5 °C तक वृद्धि कर देती है । 1 cal = 4.186 J

5. किसी आदर्श गैस के लिए स्थिर ताप तथा स्थिर दाब पर मोलीय विशिष्ट ऊष्मा धारिताएँ निम्नलिखित संबंध का पालन करती हैं

$$C_P - C_V = R$$

यहाँ R गैस का सार्वत्रिक नियतांक है।

6. किसी ऊष्मागतिकीय निकाय की साम्यावस्था का विवरण अवस्था चरों द्वारा होता है। किसी अवस्था चर का मान केवल उसकी किसी विशेष अवस्था पर निर्भर करता है न कि उस पथ पर जिससे यह अवस्था प्राप्त होती है। अवस्था चरों के उदाहरण हैं : दाब (P), आयतन (V), ताप (T), तथा द्रव्यमान (m)। ऊष्मा और कार्य अवस्था चर नहीं हैं। कोई अवस्था समीकरण (जैसे आदर्श गैस समीकरण $PV = \mu\, RT$) विभिन्न अवस्था चरों के मध्य एक संबंध को व्यक्त करता है।

7. कोई स्थैतिककल्प प्रक्रम अत्यंत धीमी गति से संपन्न होने वाला प्रक्रम है जिसमें निकाय परिवेश के साथ पूरे समय तापीय व यांत्रिक साम्य में रहता हैं। स्थैतिककल्प प्रक्रम में परिवेश के दाब व ताप तथा निकाय के दाब व ताप में अनंत सूक्ष्म अंतर हो सकता है।

8. किसी आदर्श गैस के ताप T पर आयतन V_1 से V_2 तक होने वाले किसी समतापीय प्रसार में अवशोषित ऊष्मा (Q) का मान गैस द्वारा किए गए कार्य (W) के बराबर होता है। प्रत्येक का मान निम्नलिखित है :

$$Q = W = \mu\, RT \ \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

9. किसी आदर्श गैस के रुद्धोष्म प्रक्रम में

$$PV^{\gamma} = \text{नियतांक}$$

$$\text{जहाँ } \gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

किसी आदर्श गैस द्वारा अवस्था (P_1, V_1, T_1) से अवस्था (P_2, V_2, T_2) में रुद्धोष्म प्रक्रम से परिवर्तन में संपादित कार्य है :

$$W = \frac{\mu\, R(T_1 - T_2)}{\gamma - 1}$$

10. ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम कुछ उन प्रक्रमों की स्वीकृति नहीं देता जो ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम के अनुकूल हैं। इसके दो प्रकथन इस प्रकार हैं :

केल्विन-प्लैंक का प्रकथन

ऐसा कोई प्रक्रम संभव नहीं है जिसका मात्र परिणाम केवल किसी ऊष्मा भंडार से ऊष्मा का अवशोषण करके उसे पूर्णतया कार्य में रूपांतरित करना हो।

क्लॉसियस का प्रकथन

ऐसा कोई प्रक्रम संभव नहीं है जिसका मात्र परिणाम ऊष्मा का किसी ठंडे पिंड से अपेक्षाकृत गरम पिंड में स्थानांतरण हो।

इसे सरल ढंग से कहा जाए तो द्वितीय नियम यह बताता है कि किसी भी ऊष्मा इंजन की दक्षता $\eta = 1$ नहीं हो सकती अथवा किसी प्रशीतक का निष्पादन गुणांक α अनंत के बराबर नहीं हो सकता।

11. कोई प्रक्रम उत्क्रमणीय होता है यदि उसे इस प्रकार उत्क्रमित किया जाए कि निकाय व परिवेश दोनों अपनी प्रारंभिक अवस्थाओं में वापस पहुँच जाएँ और परिवेश में कहीं भी कोई परिवर्तन न हो। प्रकृति के नैसर्गिक प्रक्रम अनुत्क्रमणीय होते हैं। आदर्शीकृत उत्क्रमणीय प्रक्रम स्थैतिककल्प प्रक्रम होता है जिसमें कोई भी क्षयकारी घटक; जैसे – घर्षण, श्यानता आदि विद्यमान नहीं रहते।

12. किन्हीं दो तापों T_1 (स्रोत) तथा T_2 (अभिगम) के मध्य कार्य करने वाला कार्नो इंजन उत्क्रमणीय इंजन है। दो रुद्धोष्म प्रक्रमों से संयुक्त दो समतापी प्रक्रम कार्नो चक्र का निर्माण करते हैं। कार्नो इंजन की दक्षता निम्नलिखित सूत्र से व्यक्त की जाती है :

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \qquad \text{(कार्नो इंजन)}$$

किन्हीं दो तापों के मध्य कार्य करने वाले इंजन की दक्षता कार्नो इंजन की दक्षता से अधिक नहीं हो सकती।

13. यदि $Q > 0$, निकाय को ऊष्मा दी गई।
यदि $Q < 0$, निकाय से ऊष्मा निकाली गई।
यदि $W > 0$, निकाय द्वारा कार्य किया गया।
यदि $W < 0$, निकाय पर कार्य किया गया।

राशि	प्रतीक	विमाएँ	मात्रक	टिप्पणी
1. आयतन प्रसार गुणांक	α_v	$[K^{-1}]$	K^{-1}	$\alpha_v = 3\,\alpha_l$
2. किसी निकाय को प्रदत्त ऊष्मा	ΔQ	$[ML^2T^{-2}]$	J	Q अवस्था चर नहीं है।
3. विशिष्ट ऊष्मा धारिता	s	$[L^2T^{-2}K^{-1}]$	$J\,kg^{-1}\,K^{-1}$	
ऊष्मा इंजन की दक्षता	η	विमाहीन	–	
प्रशीतक का निष्पादन गुणांक	α	विमाहीन	–	
4. तापीय चालकता	K	$[MLT^{-3}\,K^{-1}]$	$J\,s^{-1}\,K^{-1}$	$H = KA\dfrac{dt}{dx}$

विचारणीय विषय

1. किसी पिंड का ताप उसकी माध्य आंतरिक ऊर्जा से संबंधित है न कि उसके द्रव्यमान केंद्र की गतिज ऊर्जा से। बंदूक से दागी गई किसी गोली का उच्च ताप उसकी अधिक चाल के कारण नहीं होता।

2. ऊष्मागतिकी में साम्य उस परिस्थिति की ओर निर्देश करता है जब निकाय की ऊष्मागतिकीय अवस्था का वर्णन करने वाले स्थूल चर, समय पर निर्भर नहीं करते। यांत्रिकी में किसी निकाय की साम्यावस्था से अभिप्राय है कि निकाय पर कार्य करने वाले नेट बल तथा बल आघूर्ण दोनों शून्य होते हैं।

3. ऊष्मागतिकीय साम्य में निकाय के सूक्ष्म संघटक साम्यावस्था में नहीं होते (यांत्रिकी के प्रसंग में)।

4. ऊष्माधारिता, व्यापक रूप में उस प्रक्रम पर निर्भर करती है जिससे निकाय तब गुजरता है जब वह ऊष्मा ग्रहण करता है ।
5. समतापीय स्थैतिककल्प प्रक्रमों में, निकाय द्वारा ऊष्मा अवशोषित या निर्गत होती है यद्यपि हर चरण में गैस का ताप वही होता है जो परिवेशीय ऊष्मा भंडार होता है । निकाय तथा ऊष्मा भंडार के मध्य अत्यंत सूक्ष्म तापांतर के कारण ऐसा संभव हो पाता है ।

अभ्यास

11.1 कोई गीज़र 3.0 लीटर प्रति मिनट की दर से बहते हुए जल को 27 °C से 77 °C तक गर्म करता है । यदि गीज़र का परिचालन गैस बर्नर द्वारा किया जाए तो ईधन के व्यय की क्या दर होगी ? बर्नर के ईंधन की दहन-ऊष्मा 4.0×10^4 J g^{-1} है ?

11.2 स्थिर दाब पर 2.0×10^{-2} kg नाइट्रोजन (कमरे के ताप पर) के ताप में 45 °C वृद्धि करने के लिए कितनी ऊष्मा की आपूर्ति की जानी चाहिए ? (N_2 का अणुभार = 28; R = 8.3 J mol^{-1} K^{-1}) ।

11.3 व्याख्या कीजिए कि ऐसा क्यों होता है :

(a) भिन्न-भिन्न तापों T_1 व T_2 के दो पिण्डों को यदि ऊष्मीय संपर्क में लाया जाए तो यह आवश्यक नहीं कि उनका अंतिम ताप $(T_1 + T_2)/2$ ही हो।

(b) रासायनिक या नाभिकीय संयत्रों में शीतलक (अर्थात् द्रव जो संयत्र के भिन्न-भिन्न भागों को अधिक गर्म होने से रोकता है) की विशिष्ट ऊष्मा अधिक होनी चाहिए।

(c) कार को चलाते-चलाते उसके टायरों में वायुदाब बढ़ जाता है।

(d) किसी बंदरगाह के समीप के शहर की जलवायु, समान अक्षांश के किसी रेगिस्तानी शहर की जलवायु से अधिक शीतोष्ण होती है।

11.4 गतिशील पिस्टन लगे किसी सिलिंडर में मानक ताप व दाब पर 3 मोल हाइड्रोजन भरी है । सिलिंडर की दीवारें ऊष्मारोधी पदार्थ की बनी हैं तथा पिस्टन को उस पर बालू की परत लगाकर ऊष्मारोधी बनाया गया है । यदि गैस को उसके आरंभिक आयतन के आधे आयतन तक संपीडित किया जाए तो गैस का दाब कितना बढ़ेगा ?

11.5 रुद्धोष्म विधि द्वारा किसी गैस की अवस्था परिवर्तन करते समय उसकी एक साम्यावस्था A से दूसरी साम्यावस्था B तक ले जाने में निकाय पर 22.3 J कार्य किया जाता है। यदि गैस को दूसरी प्रक्रिया द्वारा अवस्था A से अवस्था B में लाने में निकाय द्वारा अवशोषित नेट ऊष्मा 9.35 cal है तो बाद के प्रकरण में निकाय द्वारा किया गया नेट कार्य कितना है? (1 cal = 4.19 J)।

11.6 समान धारिता वाले दो सिलिंडर A तथा B एक-दूसरे से स्टॉपकॉक के द्वारा जुड़े हैं। A में मानक ताप व दाब पर गैस भरी है जबकि B पूर्णत: निर्वातित है। स्टॉपकॉक यकायक खोल दी जाती है । निम्नलिखित का उत्तर दीजिए :

(*a*) सिलिंडर A तथा B में अंतिम दाब क्या होगा ?

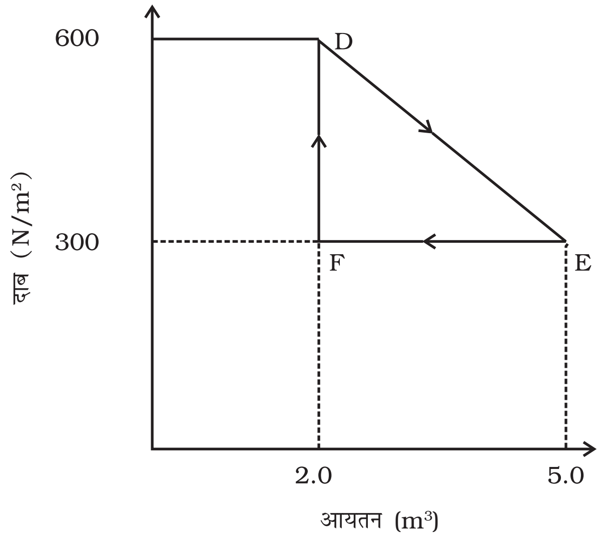
(*b*) गैस की आंतरिक ऊर्जा में कितना परिवर्तन होगा ?

(c) गैस के ताप में क्या परिवर्तन होगा ?

(*d*) क्या निकाय की माध्यमिक अवस्थाएँ (अंतिम साम्यावस्था प्राप्त करने के पूर्व) इसके P-V-T पृष्ठ पर होंगी ?

11.7 एक हीटर किसी निकाय को 100 W की दर से ऊष्मा प्रदान करता है। यदि निकाय 75 J s^{-1} की दर से कार्य करता है, तो आंतरिक ऊर्जा की वृद्धि किस दर से होगी?

11.8 किसी ऊष्मागतिकीय निकाय को मूल अवस्था से मध्यवर्ती अवस्था तक चित्र (11.11) में दर्शाये अनुसार एक रेखीय प्रक्रम द्वारा ले जाया गया है।



चित्र 11.11

एक समदाबी प्रक्रम द्वारा इसके आयतन को E से F तक ले जाकर मूल मान तक कम कर देते हैं। गैस द्वारा D से E तथा वहाँ से F तक कुल किए गए कार्य का आकलन कीजिए।

अध्याय 12

11089CH13

अणुगति सिद्धांत

12.1 भूमिका
12.2 द्रव्य की आण्विक प्रकृति
12.3 गैसों का व्यवहार
12.4 आदर्श गैसों का अणुगति सिद्धांत
12.5 ऊर्जा के समविभाजन का नियम
12.6 विशिष्ट ऊष्मा धारिता
12.7 माध्य मुक्त पथ

सारांश
विचारणीय विषय
अभ्यास
अतिरिक्त अभ्यास

12.1 भूमिका

बॉयल ने 1661 में एक नियम की खोज की, जिसे उनके नाम से जाना जाता है। बॉयल, न्यूटन एवं अन्य कई वैज्ञानिकों ने गैसों के व्यवहार को यह मानकर समझाने की चेष्टा की कि गैसें अत्यंत सूक्ष्म परमाण्वीय कणों से बनी हैं। वास्तविक परमाणु सिद्धांत तो इसके 150 से भी अधिक वर्ष बाद ही स्थापित हो पाया। अणुगति सिद्धांत इस धारणा के आधार पर गैसों के व्यवहार की व्याख्या करता है कि गैसों में अत्यंत तीव्र गति से गतिमान परमाणु अथवा अणु होते हैं। यह संभव भी है, क्योंकि ठोसों तथा द्रवों के परमाणुओं के बीच अंतरापरमाणुक बल, जो कि लघु परासी बल है, एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है जबकि गैसों में इस बल को उपेक्षणीय माना जा सकता है। अणुगति सिद्धांत, 19वीं शताब्दी में, मैक्सवेल, बोल्ट्ज़मान और अन्य वैज्ञानिकों द्वारा विकसित किया गया था। यह असाधारण रूप से सफल सिद्धांत रहा है। यह दाब एवं ताप की एक आण्विक व्याख्या प्रस्तुत करता है तथा आवोगाद्रो की परिकल्पना और गैस नियमों के अनुरूप है। यह बहुत सी गैसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता की ठीक-ठीक व्याख्या करता है। यह श्यानता, चालकता, विसरण जैसे गैसों के मापनीय गुणों को आण्विक प्राचलों से जोड़ता है और अणुओं की आमापों एवं द्रव्यमानों का आकलन संभव बनाता है। इस अध्याय में अणुगति सिद्धांत का आरंभिक ज्ञान दिया गया है।

12.2 द्रव्य की आण्विक प्रकृति

बीसवीं शताब्दी के महान वैज्ञानिकों में एक रिचर्ड फीनमेन, इस खोज को कि 'द्रव्य परमाणुओं से बना है' अत्यंत महत्वपूर्ण मानते हैं। यदि हम विवेक से काम नहीं लेंगे, तो (नाभिकीय विध्वंस के कारण) मानवता का विनाश हो सकता है, या फिर वह (पर्यावरणीय विपदाओं के कारण) विलुप्त हो सकती है। यदि वैसा होता है और संपूर्ण वैज्ञानिक ज्ञान के नष्ट होने की स्थिति उत्पन्न हो जाती है तो फीनमेन विश्व की अगली पीढ़ी के प्राणियों को परमाणु परिकल्पना संप्रेषित करना चाहेंगे। परमाणु परिकल्पना : सभी वस्तुएँ परमाणुओं से बनी हैं, जो अनवरत

प्राचीन भारत एवं यूनान में परमाण्वीय परिकल्पना

यद्यपि, आधुनिक विज्ञान से परमाण्वीय दृष्टिकोण का परिचय कराने का श्रेय जॉन डाल्टन को दिया जाता है, तथापि, प्राचीन भारत और यूनान के विद्वानों ने बहुत पहले ही परमाणुओं और अणुओं के अस्तित्व का अनुमान लगा लिया था। भारत में वैशेषिक दर्शन, जिसके प्रणेता कणाद थे (छठी शताब्दी ई.पू.), में परमाण्वीय प्रारूप का विस्तृत विकास हुआ । उन्होंने परमाणुओं को अविभाज्य, सूक्ष्म तथा द्रव्य का अविभाज्य अंश माना । यह भी तर्क दिया गया कि यदि द्रव्य को विभाजित करने के क्रम का कोई अन्त न हो तो किसी सरसों के दाने तथा मेरु पर्वत में कोई अंतर नहीं रहेगा । चार प्रकार के परमाणुओं (संस्कृत में सूक्ष्मतम कण को **परमाणु** कहते हैं) की कल्पना की गई जिनकी अपनी अभिलाक्षणिक संहति तथा अन्य विशेषताएँ थीं जो इस प्रकार हैं : भूमि (पृथ्वी), अप् (जल), तेज (अग्नि) तथा वायु (हवा) । उन्होंने आकाश (अंतरिक्ष) को सतत् तथा अक्रिय माना और यह बताया कि इसकी कोई परमाण्वीय संरचना नहीं है । परमाणु संयोग करके विभिन्न अणुओं का निर्माण करते हैं (जैसे दो परमाणु संयोग करके एक द्विपरमाणुक अणु 'द्वैणुक', तीन परमाणुओं के संयोग से 'त्रसरेणु' अथवा त्रिपरमाणुक अणु बनाते हैं), इनके गुण संघटक अणुओं की प्रकृति एवं अनुपात पर निर्भर करते हैं । अनुमानों द्वारा अथवा उन विधियों द्वारा जो हमें ज्ञात नहीं हैं, उन्होंने परमाणुओं के आकार का आकलन भी किया । इन आकलनों में विविधता है । ललित विस्तार – बुद्ध की एक प्रसिद्ध जीवनी जिसे मुख्य रूप से ईसा पूर्व द्वितीय शताब्दी में लिखा गया, में परमाणु का आकार 10^{-10} m की कोटि का बताया गया है । यह आकलन परमाणु के आकार के आधुनिक आकलनों के निकट है ।

पुरातन ग्रीस में, डेमोक्रिटस (चतुर्थ शताब्दी ई.पू.) को उनकी परमाण्वीय परिकल्पना के लिए सर्वश्रेष्ठ माना जाता है। ग्रीक भाषा में 'Atom' शब्द का अर्थ है 'अविभाज्य' । उनके अनुसार परमाणु एक दूसरे से भौतिक रूप में, आकृति में, आकार में तथा अन्य गुणों में भिन्न होते हैं तथा इसी के परिणामस्वरूप उनके संयोग द्वारा निर्मित पदार्थों के भिन्न-भिन्न गुण होते हैं। उनके विचारों के अनुसार जल के अणु चिकने तथा गोल होते हैं तथा वे एक दूसरे के साथ जुड़ने योग्य नहीं होते, यही कारण है कि जल आसानी से प्रवाहित होने लगता है। भूमि के परमाणु खुरदरे तथा काँटेदार होते हैं जिसके कारण वे एक दूसरे को जकड़े रहते हैं तथा कठोर पदार्थ निर्मित करते हैं । उनके विचार से अग्नि के परमाणु कँटीले होते हैं जिसके कारण वे पीड़ादायक जलन उत्पन्न करते हैं। ये धारणाएँ चित्ताकर्षक होते हुए भी, और आगे विकसित न हो सकीं। इसका कदाचित यह कारण हो सकता है कि ये विचार उन दार्शनिकों की अंतर्दर्शी कल्पनाएं एवं अनुमान मात्र थे, जिनका न तो परीक्षण किया गया था और न ही मात्रात्मक प्रयोगों (जो कि आधुनिक विज्ञान का प्रमाण-चिह्न हैं) द्वारा संशोधन ।

गतिमान अत्यंत सूक्ष्म कण हैं, बीच में अल्प दूरी होने पर ये एक दूसरे को आकर्षित करते हैं पर एक दूसरे में निष्पीडित किए जाने पर प्रतिकर्षित करने लगते हैं।

यह चिंतन कि द्रव्य सतत नहीं हो सकता, कई स्थानों और संस्कृतियों में विद्यमान था। भारत में कणाद और यूनान में डेमोक्रिटस ने यह सुझाव दिया था कि द्रव्य अविभाज्य अवयवों का बना हो सकता है। प्राय: वैज्ञानिक आण्विक सिद्धांत की खोज का श्रेय डाल्टन को देते हैं। तत्वों के संयोजन द्वारा यौगिक बनने की प्रक्रिया में पालन किए जाने वाले निश्चित अनुपात और बहुगुणक अनुपात के नियमों की व्याख्या करने के लिए डाल्टन ने यह सिद्धांत प्रस्तावित किया था। पहला नियम बताता है कि किसी यौगिक में अवयवों के द्रव्यमानों का अनुपात नियत रहता है। दूसरे नियम का कथन है कि जब दो तत्व मिलकर दो या अधिक यौगिक बनाते हैं तो एक तत्व के निश्चित द्रव्यमान से संयोजित होने वाले दूसरे तत्व के द्रव्यमानों में एक सरल पूर्णांकीय अनुपात होता है।

इन नियमों की व्याख्या करने के लिए, लगभग 200 वर्ष पूर्व डाल्टन ने सुझाया कि किसी तत्व के सूक्ष्मतम अवयव परमाणु हैं। एक तत्व के सभी परमाणु सर्वसम होते हैं पर ये दूसरे तत्वों के परमाणुओं से भिन्न होते हैं। अल्प संख्या में तत्वों के परमाणु संयोग करके यौगिक का अणु बनाते हैं। 19वीं शताब्दी के आरंभ में दिए गए गै-लुसैक के नियम के अनुसार: जब गैसें रासायनिक रूप से संयोजन करके कोई अन्य गैस बनाती हैं, तो उनके आयतन लघु पूर्णांकों के अनुपात में होते हैं। आवोगाद्रो का नियम (या परिकल्पना) बताता है कि समान ताप और दाब पर गैसों के समान आयतनों में अणुओं की संख्या समान होती है। आवोगाद्रो नियम को डाल्टन के सिद्धांत से जोड़ने पर गै-लुसैक के नियम की व्याख्या की जा सकती है। क्योंकि, तत्व प्राय: अणुओं के रूप में होते हैं, डाल्टन के परमाणु सिद्धांत को द्रव्य का आण्विक सिद्धांत भी कहा जा सकता है। इस सिद्धांत को अब वैज्ञानिकों द्वारा मान्यता है। तथापि, उन्नीसवीं शताब्दी के अंत तक भी ऐसे कई प्रसिद्ध

वैज्ञानिक थे जो परमाणु सिद्धांत में विश्वास नहीं करते थे।

आधुनिक काल में, बहुत से प्रेक्षणों से, अब हम यह जानते हैं कि पदार्थ अणुओं (एक या अधिक परमाणुओं से बने) से मिलकर बना होता है। इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी एवं क्रमवीक्षण सुरंगक सूक्ष्मदर्शी की सहायता से अब हम उनको देख सकते हैं। परमाणु का आमाप लगभग एक ऐंग्स्ट्रॉम (1Å) (10^{-10}m) है। ठोसों में, जहाँ कण कसकर एक दूसरे से जुड़े हैं, परमाणुओं के बीच कुछ ऐंग्स्ट्रॉम (2 Å) की दूरी है। द्रवों में भी परमाणुओं के बीच इतनी ही दूरी है। द्रवों में परमाणु एक दूसरे के साथ उतनी दृढ़ता से नहीं बँधे होते जितने ठोसों में, और, इसलिए इधर–उधर गति कर सकते हैं। इसीलिए, द्रवों में प्रवाह होता है। गैसों में अंतरपरमाणुक दूरी दसों एंग्स्ट्रॉम में होती है। वह औसत दूरी जो कोई अणु बिना संघट्ट किए चल सकता है उसकी **औसत मुक्त पथ** कहलाती है। गैसों में औसत मुक्त पथ हजारों एंग्स्ट्रॉम की कोटि का होता है। अत: गैसों में परमाणु अत्यधिक स्वतंत्र होते हैं और बड़ी–बड़ी दूरियों तक बिना संघट्ट किए जा सकते हैं। यदि बंद करके न रखा जाए, तो गैसें विसरित हो जाती हैं। ठोसों और द्रवों में पास–पास होने के कारण परमाणुओं के बीच के अंतर परमाणुक बल महत्वपूर्ण हो जाते हैं। ये बल अधिक दूरियों पर आकर्षण और अल्प दूरी पर प्रतिकर्षण बल होते हैं। जब परमाणु एक दूसरे से कुछ एंग्स्ट्रॉम की दूरी पर होते हैं तो वे एक दूसरे को आकर्षित करते हैं पर बहुत पास लाए जाने पर प्रतिकर्षित करने लगते हैं। गैस का स्थैतिक दिखाई पड़ना भ्रामक है। गैस सक्रियता से भरपूर है और इनका संतुलन गतिक संतुलन है। गतिक संतुलन में अणु एक दूसरे से संघट्ट करते हैं और संघट्ट की अवधि में उनकी चालों में परिवर्तन होता है। केवल औसत गुण नियत रहते हैं।

परमाणु सिद्धांत हमारी खोजों का अंत नहीं है बल्कि यह तो इसका एक आरंभ है। अब हम जानते हैं कि परमाणु अविभाज्य या मूल कण नहीं हैं। उनमें एक नाभिक और इलेक्ट्रॉन होते हैं। नाभिक स्वयं प्रोटॉनों और न्यूट्रॉनों से बने होते हैं। यही नहीं प्रोटॉन तथा न्यूट्रॉन क्वार्कों से मिलकर बने होते हैं। हो सकता है कि क्वार्क भी इस कहानी का अंत न हों। यह भी हो सकता है कि स्ट्रिंग (तंतु) जैसी कोई प्राथमिक सत्ता हो। प्रकृति हमारे लिए सदैव ही विलक्षण भरी है, पर, सत्य की खोज आनंददायक होती है और हर आविष्कार में अपना सौंदर्य होता है। इस अध्याय में हम अपना अध्ययन गैसों के (और थोड़ा बहुत ठोसों के) व्यवहार तक ही सीमित रखेंगे। इसके लिए हम उन्हें अनवरत गति करते गतिमान कणों का समूह मानेंगे।

12.3 गैसों का व्यवहार

ठोसों एवं द्रवों की तुलना में गैसों के गुणों को समझना आसान है। यह मुख्यत: इस कारण होता है, क्योंकि, गैस में अणु एक दूसरे से दूर–दूर होते हैं और दो अणुओं के संघट्ट की स्थिति को छोड़कर उनके बीच पारस्परिक अन्योन्य क्रियाएँ उपेक्षणीय होती हैं जैसे निम्न दाब व उनके द्रवित (या घनीभूत) होने के तापों की अपेक्षा अत्यधिक उच्च ताप पर अपने ताप, दाब और आयतन में लगभग निम्नलिखित संबंध दर्शाती हैं (देखिए अध्याय 10)

$$PV = KT \tag{12.1}$$

यह संबंध गैस के दिए गए नमूने के लिए है। यहाँ T केल्विन (या परम) पैमाने पर ताप है, K दिए गए नमूने के लिए नियतांक है परंतु आयतन के साथ परिवर्तित होता है यदि अब हम परमाणु या अणु की धारणा लागू करें तो, K दिए गए नमूने में अणुओं की संख्या N के अनुक्रमानुपाती है। हम लिख सकते हैं, $K = N\,k$। प्रयोग हमें बताते हैं कि k का मान सभी गैसों के लिए समान है। इसको बोल्ट्समान नियतांक कहा जाता है और k_B द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है।

$$\frac{P_1V_1}{N_1T_1} = \frac{P_2V_2}{N_2T_2} = \text{नियतांक} = k_B \tag{12.2}$$

यदि P, V एवं T समान हों तो N भी सभी गैसों के लिए समान होगा। यही आवोगाद्रो परिकल्पना है कि समान ताप एवं दाब पर सभी गैसों के प्रति एकांक आयतन में अणुओं की संख्या समान होती है। किसी गैस के 22.4 लीटर आयतन में यह संख्या 6.02×10^{23} है। इस संख्या को आवोगाद्रो संख्या कहा जाता है और संकेत N_A द्वारा चिह्नित किया जाता है। किसी गैस के 22.4 लीटर आयतन का STP (मानक ताप = 273K एवं मानक दाब = 1 एटमौस्फियर) पर द्रव्यमान उस गैस के ग्राम में व्यक्त अणु द्रव्यमान के बराबर है। पदार्थ की यह मात्रा मोल (mole) कहलाती है (अधिक परिशुद्ध परिभाषा के लिए अध्याय 1 देखिए)। आवोगाद्रो ने रासायनिक अभिक्रियाओं के अध्ययन के आधार पर यह अनुमान लगा लिया था कि समान ताप और दाब पर गैसों के समान आयतन में अणुओं की संख्या समान होगी। अणुगति सिद्धांत इस परिकल्पना को न्यायसंगत ठहराता है।

आदर्श गैस समीकरण को हम इस प्रकार लिख सकते हैं,

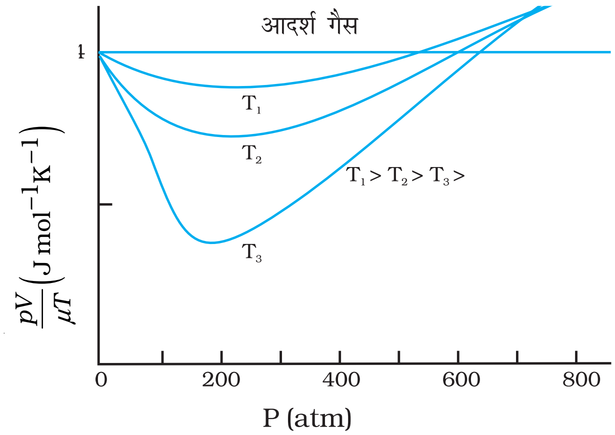
$$PV = \mu\, RT \tag{12.3}$$

जहाँ μ मोलों की संख्या है एवं $R = N_A\, k_B$ एक सार्वत्रिक नियतांक है। ताप T, परम ताप है। परम ताप के लिए केल्विन पैमाना चुनें, तो $R = 8.314\ \text{J mol}^{-1}\text{K}^{-1}$। यहाँ

$$\mu = \frac{M}{M_0} = \frac{N}{N_A} \tag{12.4}$$

जहाँ, M गैस का द्रव्यमान है जिसमें N अणु हैं, M_0 मोलर द्रव्यमान है एवं N_A आवोगाद्रो संख्या है। समीकरण (12.4) का उपयोग करके समीकरण (12.3) को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :

$$PV = k_B\, NT \quad \text{अथवा} \quad P = k_B\, nT$$



चित्र 12.1 *निम्न दाब और उच्च तापों पर वास्तविक गैसों का व्यवहार आदर्श गैसों के सदृश होने लगता है।*

जहाँ n संख्या घनत्व, अर्थात् प्रति एकांक आयतन में अणुओं की संख्या है। k_B उपरिवर्णित बोल्ट्ज़मान नियतांक हैं। SI मात्रकों में इसका मान 1.38×10^{-23} J K^{-1} है।

समीकरण (12.3) का दूसरा उपयोगी रूप है,

$$P = \frac{\rho RT}{M_0} \qquad (12.5)$$

जहाँ ρ गैस का द्रव्यमान घनत्व है।

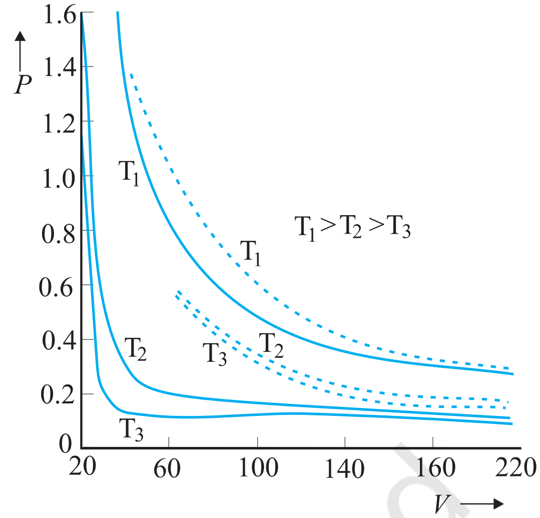
कोई गैस, जो समीकरण (12.3) का, सभी तापों और दाबों पर पूर्णतः पालन करती है **आदर्श गैस** कहलाती है। अतः आदर्श गैस किसी गैस का सरल सैद्धांतिक निदर्श है। कोई भी वास्तविक गैस सही अर्थों में आदर्श गैस नहीं होती। चित्र 12.1 में तीन भिन्न तापों पर किसी वास्तविक गैस का आदर्श गैस से विचलन दर्शाया गया है। ध्यान दीजिए, निम्न दाबों और उच्च तापों पर सभी वक्र आदर्श गैस व्यवहार के सदृश होने लगते हैं।

निम्न दाबों और उच्च तापों पर अणु दूर-दूर होते हैं और उनके बीच की आण्विक अन्योन्य क्रियाएँ उपेक्षणीय होती हैं। अन्योन्य क्रियाओं की अनुपस्थिति में गैस एक आदर्श गैस की तरह व्यवहार करती है।

समीकरण 12.3 में यदि हम μ एवं T को निश्चित कर दें, तो,

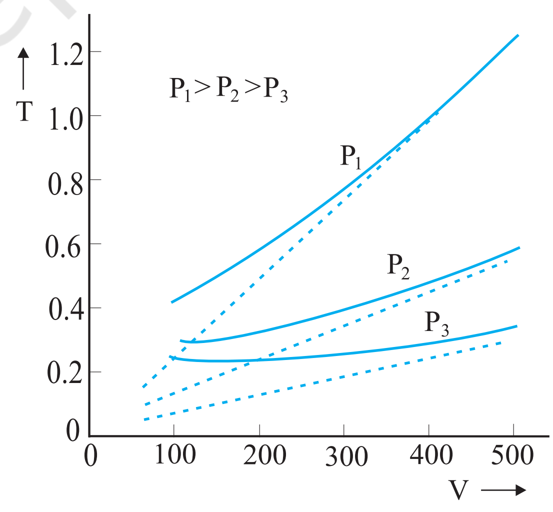
$$PV = \text{नियतांक} \qquad (12.6)$$

अर्थात्, नियत ताप पर, गैस के किसी दिए गए द्रव्यमान का दाब उसके आयतन के व्युत्क्रमानुपाती होता है। यही प्रसिद्ध **बॉयल का नियम** है। चित्र 12.2 में प्रायोगिक P-V वक्र एवं बॉयल के नियमानुसार भविष्यवाची सैद्धांतिक वक्र, तुलना के लिए एक साथ दर्शाये गए हैं। एक बार फिर आप देख सकते हैं कि निम्न दाब और उच्च ताप पर प्रायोगिक एवं सैद्धांतिक



चित्र 12.2 *भाप के लिए, तीन भिन्न तापों पर प्रायोगिक P-V वक्रों (ठोस रेखाएँ) की बॉयल के नियम (बिंदुकित रेखाएँ) से तुलना। P का मान 22 atm के मात्रकों में है और V का मान 0.09 लीटर के मात्रकों में है।*

वक्रों में संगति स्पष्ट दृष्टिगोचर होता है। अब, यदि आप P को नियत रखें तो समीकरण (12.1) दर्शाती है कि $V \propto T$ अर्थात्, नियत दाब पर किसी दी गई गैस का आयतन उसके परम ताप T के अनुक्रमानुपाती होता है **(चार्ल्स का नियम)**। चित्र 12.3 देखिए।



चित्र 12.3 *तीन भिन्न दाबों के लिए CO_2 के प्रायोगिक T-V वक्रों की (पूर्ण रेखाओं द्वारा प्रदर्शित) चार्ल्स नियमानुसार प्राप्त सैद्धांतिक वक्रों से (बिंदुकित रेखाओं द्वारा प्रदर्शित) तुलना। T, 300 K के मात्रकों में एवं V, 0.13 लीटर के मात्रकों में है।*

अंत में, हम एक बर्तन में रखे गए, परस्पर अन्योन्य क्रियाएँ न करने वाली आदर्श गैसों के मिश्रण पर विचार करते हैं, जिसमें μ_1 मोल गैस-1 के, μ_2 मोल गैस-2 के और इसी प्रकार अन्य गैसों के विभिन्न मोल हैं। बर्तन का आयतन V है, गैस का परम ताप T एवं दाब P है। मिश्रण की अवस्था का समीकरण लिखें तो,

$$PV = (\mu_1 + \mu_2 + \ldots)\,RT \tag{12.7}$$

$$\text{अर्थात्}\ P = \mu_1 \frac{RT}{V} + \mu_2 \frac{RT}{V} + \ldots \tag{12.8}$$

$$= P_1 + P_2 + \ldots \tag{12.9}$$

स्पष्टत:, $P_1 = \mu_1 RT/V$ वह दाब है जो ताप और आयतन की समान अवस्थाओं में अन्य सभी गैसों की अनुपस्थिति में केवल गैस-1 के कारण होता। इस दाब को गैस का आंशिक दाब कहते हैं। अत: आदर्श गैसों के किसी मिश्रण का कुल दाब मिश्रण में विद्यमान गैसों के आंशिक दाबों के योग के बराबर होता है। यह डाल्टन का आंशिक दाबों का नियम है।

अब हम कुछ ऐसे उदाहरणों पर विचार करेंगे जिनसे हमें अणुओं द्वारा घेरे गए आयतन और एक अणु के आयतन के विषय में जानकारी प्राप्त होगी।

▶ ***उदाहरण 12.1*** जल का घनत्व $1000\ kg\ m^{-3}$ है। $100\ °C$ और 1 atm दाब पर जलवाष्प का घनत्व 0.6 $kg\ m^{-3}$ हैं। एक अणु के आयतन को कुल अणुओं की संख्या से गुणा करने पर हमें आण्विक आयतन प्राप्त होता है। ताप और दाब की उपरोक्त अवस्था में जलवाष्प के कुल आयतन और इसके आण्विक आयतन का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : जल के किसी दिए गए द्रव्यमान के लिए यदि घनत्व कम हो, तो आयतन अधिक होगा। अत:, वाष्प का आयतन $1000/0.6 = 1/(6\times10^{-4})$ गुणा अधिक है। यदि स्थूल जल और जल के अणुओं के घनत्व समान हैं, तो गैस के अणुओं वाले भाग के आयतन, तथा उन्हीं अणुओं का द्रवित होकर जल की अवस्था में आयतन, का अनुपात 1 होगा। चूंकि वाष्प अवस्था में आयतन बढ़ गया है, अत: आंशिक आयतन उसी अनुपात (यानि 6×10^{-4} गुणा) में कम हो जाएगा। ◀

▶ ***उदाहरण 12.2*** उदाहरण 12.1 में दिए गए आंकड़ों का उपयोग करके जल के एक अणु का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : द्रव(या ठोस) प्रावस्था में, जल के अणु बहुत पास-पास संकुलित होते हैं। अत: जल के अणुओं का घनत्व, मोटे तौर पर स्थूल जल के घनत्व = $1000\ kg\ m^{-3}$ ले सकते हैं। जल के एक अणु का आयतन ज्ञात करने के लिए हमें इसका द्रव्यमान जानने की आवश्यकता होगी। हमें ज्ञात है कि एक मोल जल का द्रव्यमान लगभग

$(2 + 16) = 18\ g = 0.018\ kg$

चूंकि 1 मोल में लगभग 6×10^{23} अणु (आवोगाद्रो संख्या) होते हैं, जल के एक अणु का द्रव्यमान = $(0.018)/(6\times10^{23})\ kg = 3\times10^{-26}\ kg$ है। अत: जल के एक अणु के आयतन का रूक्ष आकलन इस प्रकार किया जाता है :

जल के एक अणु का आयतन

$= (3\times10^{-26}\ kg)/(1000\ kg\ m^{-3})$

$= 3\times10^{-29}\ m^3$

$= (4/3)\,\pi\ (\text{त्रिज्या})^3$

जल के अणु की त्रिज्या $\approx 2\times10^{-10}\ m$

$= 2\ Å$ ◀

▶ ***उदाहरण 12.3*** जल के अणुओं के बीच औसत दूरी (अंतर परमाणुक दूरी) कितनी है? इसके लिए आप उदाहरण (12.1) एवं (12.2) में दिए गए आंकड़ों का उपयोग कर सकते हैं।

हल : जल के किसी द्रव्यमान का आयतन, वाष्प प्रावस्था में, द्रव प्रावस्था में इसी द्रव्यमान के आयतन का 1.67×10^3 गुना होता है (उदाहरण 12.1)। इतने गुना ही जल के प्रत्येक अणु द्वारा घेरे गए आयतन में वृद्धि हो जाती है। जब आयतन में 10^3 गुनी वृद्धि हो जाती है, तो त्रिज्या $V^{1/3}$ अर्थात् 10 गुना हो जाती है। इस तरह त्रिज्या $10\times2\ Å = 20\ Å$ हो जाती है अर्थात् अणुओं के बीच की दूरी $2\times20 = 40\ Å$ हो जाती है। ◀

▶ ***उदाहरण 12.4*** एक बर्तन में दो अक्रिय गैसें : निऑन (एकपरमाणुक) और ऑक्सीजन (द्विपरमाणुक) भरी हैं। इनके आंशिक दाबों का अनुपात 3 : 2 है। आकलन कीजिए, (i) उनके अणुओं की संख्या का अनुपात, (ii) बर्तन में निऑन एवं ऑक्सीजन के द्रव्यमान घनत्वों का अनुपात। Ne का परमाणु द्रव्यमान 20.2 u एवं ऑक्सीजन का अणु द्रव्यमान = 32.0 u ।

हल : किसी दिए गए ताप पर गैसों के मिश्रण में, किसी एक गैस का आंशिक दाब वह दाब है जो उसी ताप पर बर्तन में भरी होने पर यह अकेली गैस आरोपित करती (अक्रिय गैसों के एक मिश्रण का कुल दाब, अवयवी गैसों के आंशिक दाबों के योग

के बराबर होता है।)। प्रत्येक गैस (आदर्श गैस मानते हुए) गैस नियम का पालन करती है। चूंकि दो गैसों के मिश्रण में V एवं T दोनों के लिए समान हैं, $P_1V = \mu_1 RT$ एवं $P_2V = \mu_2 RT$, अर्थात् $(P_1/P_2) = (\mu_1 / \mu_2)$। यहाँ 1 एवं 2 क्रमशः निऑन एवं ऑक्सीजन को इंगित करते हैं।

$(P_1/P_2) = (3/2)$ (दिया है), $(\mu_1/ \mu_2) = 3/2$

(i) परिभाषा के अनुसार, $\mu_1 = (N_1/N_A)$ एवं $\mu_2 = (N_2/N_A)$ जहाँ N_1 एवं N_2 क्रमशः गैस–1 एवं गैस–2 में अणुओं की संख्या है तथा N_A आवोगाद्रो संख्या है।

इस प्रकार, $(N_1/N_2) = (\mu_1 / \mu_2) = 3/2$

(ii) हम यह भी लिख सकते हैं कि $\mu_1 = (m_1/M_1)$ एवं $\mu_2 = (m_2/M_2)$ जहाँ m_1 एवं m_2 गैस–1 तथा गैस–2 के द्रव्यमान हैं और M_1 तथा M_2 उनके आण्विक द्रव्यमान हैं। (m_1 एवं M_1 तथा m_2 एवं M_2 को एक ही मात्रक में व्यक्त किया जाना चाहिए)। यदि ρ_1 एवं ρ_2 क्रमशः गैस–1 एवं गैस–2 के द्रव्यमान घनत्व हों तो,

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{m_1/V}{m_2/V} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \times \left(\frac{M_1}{M_2}\right)$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{20.2}{32.0} = 0.947$$

◀

12.4 आदर्श गैसों का अणुगति सिद्धांत

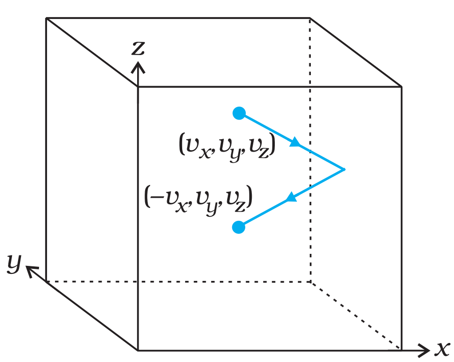
गैसों का अणुगति सिद्धांत इस मान्यता पर आधारित है कि द्रव्य अणुओं का बना है। गैस के किसी दिए गए द्रव्यमान में अति विशाल (प्रारूपिक मान आवोगाद्रो संख्या की कोटि का) संख्या में अणु होते हैं जो लगातार यादृच्छिक गति करते हैं। सामान्य ताप और दाब पर अणुओं के बीच की दूरी अणु के आकार (2 Å) की तुलना में 10 गुने से भी अधिक होती है। इसलिए अणुओं के बीच उपेक्षणीय अन्योन्य क्रिया होती है और ऐसा हम मान सकते हैं वे न्यूटन के गति के प्रथम नियम के अनुसार स्वतंत्र रूप से सरल रेखा में चलते हैं, तथापि, कभी–कभी वे एक दूसरे के अत्यधिक निकट आ जाते हैं, तब वे अंतर–आण्विक बल का अनुभव करते हैं और उनके वेग परिवर्तित हो जाते हैं। अणुओं के बीच की इस अन्योन्य क्रिया को संघट्ट कहते हैं। इस प्रकार अणु लगातार परस्पर और धारक पात्र की दीवारों से संघट्ट करके अपने वेग परिवर्तित करते रहते हैं। ये सभी संघट्ट प्रत्यास्थ होते हैं। अणुगति सिद्धांत के आधार पर हम गैस के दाब के लिए एक व्यंजक व्युत्पन्न कर सकते हैं।

हम इस मूल धारणा से प्रारंभ करते हैं कि गैस के अणु सतत यादृच्छिक गति में हैं और वे एक दूसरे से और धारक पात्र की दीवारों से संघट्ट करते रहते हैं। अणुओं के संघट्ट चाहे पारस्परिक हों, या धारक पात्र की दीवार से ये सभी संघट्ट प्रत्यास्थ होते हैं। इसका अर्थ है कि इनकी कुल गतिज ऊर्जा संरक्षित रहती है। कुल संवेग भी, जैसा प्रायः होता है, संरक्षित रहता है।

12.4.1 किसी आदर्श गैस का दाब

माना कि l भुजा के किसी घनाकार बर्तन में कोई आदर्श गैस भरी है। चित्र 12.4 में दर्शाए अनुसार बर्तन की भुजाएँ संदर्भ अक्षों के समांतर हैं। एक अणु जिसका वेग (v_x, v_y, v_z) है, yz-तल के समांतर दीवार, जिसका क्षेत्रफल $A\,(= l^2)$ है, पर संघात करता है। क्योंकि संघट्ट प्रत्यास्थ है, यह अणु दीवार से टकराकर उसी वेग से वापस लौटता है। संघट्ट के फलस्वरूप इसके वेग के y और z घटक तो परिवर्तित नहीं होते परंतु x-घटक का चिह्न उत्क्रमित हो जाता है। अर्थात् संघट्ट के पश्चात वेग $(-v_x, v_y, v_z)$ हो जाता है। इस अणु के संवेग में परिवर्तन $-mv_x - (mv_x) = -2mv_x$ होगा। संवेग संरक्षण के नियमानुसार इतना ही संवेग $= 2mv_x$ संघट्ट में दीवार को प्रदान किया जाएगा।

दीवार पर आरोपित बल (एवं दाब) का परिकलन करने के लिए, हमें प्रति एकांक समय में दीवार पर प्रदान किए जाने वाले संवेग का परिकलन करना होगा। एक अल्प काल–अंतराल Δt में कोई अणु जिसके वेग का x-अवयव v_x है दीवार से संघट्ट करेगा यदि यह दीवार से $v_x \Delta t$ दूरी के भीतर है। अर्थात् वह



चित्र 12.4 गैस के एक अणु का धारक की दीवार से प्रत्यास्थ संघट्ट।

सभी अणु, जो दीवार के पास $Av_x\Delta t$ आयतन में हैं; Δt समय में केवल वही दीवार से संघात कर सकेंगे। परंतु औसतन इन अणुओं में से आधे दीवार की ओर गति करते हैं और आधे दीवार से दूर गति करते हैं। अतः (v_x, v_y, v_z) वेग से चलते हुए अणुओं में से $\frac{1}{2} A v_x \Delta t\, n$ अणु Δt समय में दीवार से संघात करेंगे, यहाँ n प्रति एकांक आयतन में अणुओं की संख्या है। तब Δt समय में अणुओं द्वारा दीवार को प्रदान किया गया संवेग होगा,

$$Q = (2mv_x)\,(-\,n\,A\,v_x\,\Delta t) \qquad (12.10)$$

दीवार पर लगा बल संवेग हस्तांतरण की दर $Q/\Delta t$ एवं दाब प्रति एकांक क्षेत्रफल पर लगा बल है,

$$P = Q\,/(A\,\Delta t) = n\,m\,v_x^{\,2} \qquad (12.11)$$

वास्तव में, गैस के सभी अणुओं का वेग समान नहीं होता, वेग अणुओं पर वितरित रहते हैं। अतः, उपरोक्त समीकरण अणुओं के उस समूह के कारण दाब को व्यक्त करती है जिनकी x-दिशा में चाल v_x है और n इस ही अणु समूह का संख्या घनत्व है। कुल दाब ज्ञात करने के लिए सभी समूहों के योगदानों का संकलन करना होगा। तब,

$$P = n\,m\,\overline{v^2} \qquad (12.12)$$

जहाँ $\overline{v_x^2}$, $v_x^{\,2}$ का औसत है। अब, क्योंकि गैस समदैशिक है, अर्थात् धारक पात्र में अणुओं के वेग की कोई वरीय दिशा नहीं है, इसलिए सममिति के अनुसार,

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_3^2} =$$

$$(1/3)\,[\,\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_3^2}\,] = (1/3)\,\overline{v^2} \qquad (12.13)$$

जहाँ v चाल है, और $\overline{v^2}$ वर्गीकृत चालों का माध्यम है। अतः,

$$P = (1/3)\,n\,m\,\overline{v^2} \qquad (12.14)$$

इस व्युत्पत्ति पर कुछ टिप्पणियाँ : (i) प्रथम, यद्यपि हमने घनाकार बर्तन का चयन किया है, परंतु वास्तव में, बर्तन की आकृति से कुछ अंतर नहीं पड़ता है। बर्तन किसी भी यादृच्छिक आकृति का हो, हम एक अत्यंत सूक्ष्म समतल लेकर उस पर उपरोक्त व्युत्पत्ति के चरण लागू कर सकते हैं। ध्यान दीजिए, A एवं Δt दोनों ही अंतिम परिणाम में प्रकट नहीं होते हैं। अध्याय 10 में दिए गए पास्कल के नियम के अनुसार यदि कोई गैस साम्यावस्था में हो, तो उसके एक भाग पर जितना दाब होता है उतना ही दाब किसी दूसरे भाग पर भी होता है। (ii) द्वितीय, इस व्युत्पत्ति में हमने किन्हीं भी संघट्टों को उपेक्षणीय मानकर परिकलनों में सम्मिलित नहीं किया है। यद्यपि, इस पूर्वधारणा का कोई पक्का औचित्य बताना तो कठिन है, परंतु गुणात्मक रूप से हम यह देख सकते हैं कि इससे अंतिम परिणाम में त्रुटि नहीं आती। Δt सेकंड में दीवार से संघात करने वाले अणुओं की औसत संख्या – $n A v_x \Delta t$ पाई जाती है। अब, चूंकि संघट्ट यादृच्छिक है और गैस एक स्थायी प्रावस्था में है, यदि (v_x, v_y, v_z) वेग वाले अणु की, संघट्ट के कारण, गति बदल भी जाएगी तो भिन्न प्रारंभिक वेग वाला कोई कण संघट्ट के बाद यह वेग (v_x, v_y, v_z) प्राप्त कर लेगा। क्योंकि यदि ऐसा नहीं होगा तो वेगों का वितरण स्थायी नहीं रह पाएगा। सभी प्रकरणों में हम $\overline{v_x^2}$ का मान प्राप्त करेंगे। और इस प्रकार अणुओं के संघट्ट (जब तक कि वे बहुत जल्दी-जल्दी नहीं हो रहे हैं और एक संघट्ट में लगा समय दो संघट्टों के बीच के समय की तुलना में उपेक्षणीय है) से उपरोक्त परिकलन प्रभावित नहीं होता।

12.4.2 ताप की अणु गतिक व्याख्या

समीकरण (12.14) को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है,

$$PV = (1/3)\,nV\,m\,\overline{v^2} \qquad (12.15a)$$

$$PV = (2/3)\,[N\,x - m\,\overline{v^2}\,] \qquad (12.15b)$$

यहाँ $N\,(= nV)$ गैस के नमूने में अणुओं की कुल संख्या है।

दीर्घ कोष्ठक में लिखी राशि गैस के अणुओं की औसत स्थानांतरीय गतिज ऊर्जा है। क्योंकि किसी आदर्श गैस की आंतरिक ऊर्जा पूर्णतः गतिज ऊर्जा* ही है,

$$E = N \times (1/2)\,m\,\overline{v^2} \qquad (12.16)$$

समीकरण (12.15b) से तब हमें प्राप्त होता है,

$$PV = (2/3)\,E \qquad (12.17)$$

अब हम ताप की अणुगतिक व्याख्या के लिए तैयार हैं। समीकरण (12.17) का आदर्श गैस समीकरण (12.3) से संयोजित करने पर

$$E = (3/2)\;k_B\,NT \qquad (12.18)$$

या $E/\,N = -\;m\,\overline{v^2} \;=\; (3/2)\,k_BT \qquad (12.19)$

अर्थात्, किसी अणु की औसत गतिज ऊर्जा, गैस के परम ताप के अनुक्रमानुपाती होती है : यह आदर्श गैस की प्रकृति, दाब या आयतन पर निर्भर नहीं करती। यह एक मौलिक निष्कर्ष है, जो किसी गैस के ताप, जो गैस का एक स्थूल, मेय, प्राचल (जिसे ऊष्मागतिकी चर कहा जाता है) है, को किसी आण्विक

* संकेत E आंतरिक ऊर्जा U, जिसमें अन्य स्वातंत्र्य कोटियों के कारण भी ऊर्जाएँ सम्मिलित हो सकती हैं (देखिये अनुभाग 12.5), का केवल स्थानांतरीय भाग ही व्यक्त करता है।

राशि, जिसे अणु की औसत गतिज ऊर्जा कहते हैं से संबद्ध करता है। बोल्ट्ज़मान नियतांक इन दो प्रभाव क्षेत्रों को जोड़ता है। ध्यान से देखें तो समीकरण (12.18) यह स्पष्ट करती है कि आदर्श गैस की आंतरिक ऊर्जा केवल उसके ताप पर निर्भर करती है, दाब या आयतन पर नहीं। ताप की इस व्याख्या से स्पष्ट है कि आदर्श गैसों का अणुगति सिद्धांत आदर्श गैस समीकरण और इस पर आधारित विभिन्न गैस नियमों के पूर्णतः संगत है।

अक्रिय आदर्श गैसों के मिश्रण के लिए कुल दाब मिश्रण की प्रत्येक गैस के दाब का योगदान होता है। समीकरण (12.14) को नए रूप में इस प्रकार लिख सकते हैं,

$$P = (1/3)\,[n_1 m_1 \overline{v_1^2} + n_2 m_2 \overline{v_2^2} + \dots\,] \qquad (12.20)$$

साम्यावस्था में विभिन्न गैसों के अणुओं की औसत गतिज ऊर्जा समान हो जाएगी। अर्थात्

$$-\, m_1 \overline{v_1^2} = -\, m_2 \overline{v_2^2} = (3/2)\, k_B\, T$$

अतः, $P = (n_1 + n_2 + \dots\,)\, k_B\, T$ (12.21)

यही डाल्टन का आंशिक दाबों का नियम है।

समीकरण (12.19) से हम किसी गैस में अणुओं की प्रारूपिक चाल का अनुमान लगा सकते हैं। नाइट्रोजन के एक अणु की $T = 300$ K, ताप पर माध्य वर्ग चाल होगी :

यहाँ, $m = \dfrac{M_{N_2}}{N_A} = \dfrac{28}{6.02 \times 10^{26}} = 4.65 \times 10^{-26}$ kg

$$\overline{v^2} = 3\, k_B\, T / m = (516)^2\ \text{m}^2\text{s}^{-2}$$

$\overline{v^2}$ का वर्गमूल इसकी वर्ग माध्य मूल (rms) चाल कहलाती है और इसे v_{rms} द्वारा निर्दिष्ट करते हैं।

($\overline{v^2}$ को हम $< v^2 >$ भी लिख सकते हैं)

$v_{\text{rms}} = 516\ \text{m s}^{-1}$

इस चाल की कोटि वायु में ध्वनि के वेग के समान है। समीकरण (12.19) से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि समान ताप पर हलके अणुओं की rms चाल अधिक होती है।

> **उदाहरण 12.5** किसी फ्लास्क में आर्गन एवं क्लोरीन गैस भरी है जिनके द्रव्यमान 2 : 1 के अनुपात में हैं। मिश्रण का ताप 27°C है। दोनों गैसों के (i) प्रति अणु की औसत गतिज ऊर्जा का अनुपात (ii) दोनों गैसों के अणुओं की वर्ग माध्य मूल चालों v_{rms} का अनुपात ज्ञात कीजिए। आर्गन का परमाणु द्रव्यमान = 39.9 u, क्लोरीन का अणु द्रव्यमान = 70.9u

हल यहाँ याद रखने योग्य महत्वपूर्ण बात यह है कि किसी (आदर्श) गैस की (प्रति अणु) औसत गतिज ऊर्जा (चाहे वह आर्गन की तरह एक परमाणुक हो, क्लोरीन की तरह द्विपरमाणुक हो, अथवा बहुपरमाणुक भी क्यों न हो) सदैव ही $(3/2)\, k_B T$ के बराबर होती है, गैस के ताप पर निर्भर करती है और गैस की प्रकृति पर निर्भर नहीं करती।

(i) चूंकि फ्लास्क में आर्गन और क्लोरीन दोनों का ताप समान है, अतः इन दो गैसों की (प्रति अणु) औसत गतिज ऊर्जाओं का अनुपात 1 : 1 है।

(ii) अब $-\, m\, v_{\text{rms}}^{\ 2}$ = प्रति अणु औसत गतिज ऊर्जा = $(3/2)\,)\, k_B T$ यहाँ m गैस के एक अणु का द्रव्यमान है।

$$\frac{(v_{rms}^2)_{\text{Ar}}}{(v_{rms}^2)_{\text{Cl}}} = \frac{(m)_{\text{Cl}}}{(m)_{\text{Ar}}} = \frac{(M)_{\text{Cl}}}{(M)_{\text{Ar}}} = \frac{70.9}{39.9} = 1.77$$

यहाँ M गैस का अणु-द्रव्यमान है (आर्गन का परमाणु ही उसका अणु है।) दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर

$$\frac{(v_{rms})_{\text{Ar}}}{(v_{rms})_{\text{Cl}}} = 1.33$$

आपने इस तथ्य पर ध्यान दिया होगा कि उपरोक्त परिकलनों में मिश्रण के द्रव्यमानों के आधार पर संघटन की कोई प्रासंगिकता नहीं है। यदि ताप का मान अपरिवर्तित रहता है तो आर्गन और क्लोरीन के द्रव्यमान किसी अन्य अनुपात में होते, तब भी (i) एवं (ii) के उत्तर यही होते। ◀

> **उदाहरण 12.6** यूरेनियम के दो समस्थानिकों के द्रव्यमान 235 u एवं 238 u हैं। यदि यूरेनियम हेक्साफ्लोराइड गैस में ये दोनों समस्थानिक विद्यमान हों, तो किसकी औसत चाल अधिक होगी? यदि फ्लोरीन का परमाणु द्रव्यमान 19 u हो, तो किसी भी ताप पर, इनकी चालों में प्रतिशत अंतर आकलित कीजिए।

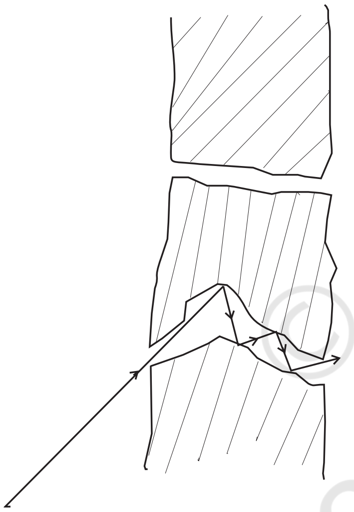
हल : किसी नियत ताप पर औसत ऊर्जा = ½ $m <v^2>$ नियत रहती है। अतः अणु का द्रव्यमान जितना कम होगा, उतनी ही अधिक तीव्र उसकी गति होगी। चालों का अनुपात, द्रव्यमानों के अनुपात के वर्गमूल के व्युत्क्रमानुपाती है। चूंकि यहाँ द्रव्यमान 349u एवं 352 इकाइयाँ हैं, इसलिए

$$v_{349} / v_{352} = (352/\,349)^{1/2} = 1.0044$$

चालों के अंतर का प्रतिशत $\dfrac{\Delta V}{V} = 0.44\ \%$

^{235}U वह समस्थानिक है जिसकी आवश्यकता नाभिकीय विखंडन में होती है। इसको अधिक मात्रा में पाए जाने वाले समस्थानिक ^{238}U से पृथक करने के लिए मिश्रण को एक सरंध्र सिलिंडर द्वारा चारों ओर से घेर देते हैं। सरंध्र सिलिंडर मोटी दीवार का लेकिन संकरा होना चाहिए ताकि अणु लंबे रंध्रों की दीवारों से संघट्ट करते हुए एक एक कर जा सकें। धीमे अणुओं की तुलना में तीव्रगति से चलने वाले अणु अधिक संख्या में रिस कर बाहर आएंगे और इस प्रकार सरंध्र सिलिंडर के बाहर हलके अणु अधिक मात्रा में पाए जाएँगे (संवर्धन) (देखिए चित्र 12.5)। यह विधि अत्यंत प्रभावी नहीं है और पर्याप्त संवर्धन के लिए इसे कई बार दोहराना पड़ता है। ◀

जब गैसें विसरित होती हैं, तो उनके विसरण की दर उनके अणुओं के द्रव्यमान के वर्गमूल के व्युत्क्रमानुपाती होती है (देखिए अभ्यास 12.12)। क्या उपरोक्त उत्तर के आधार पर आप इस तथ्य की व्याख्या का अनुमान लगा सकते हैं?



चित्र 12.5 एक सरंध्र दीवार से गुज़रते हुए अणु।

उदाहरण 12.7 (a) जब कोई अणु (या प्रत्यास्थ गेंद) किसी (भारी) दीवार से टकराता है, तो टकराने के पश्चात् यह उसी चाल से विपरीत दिशा में वापस लौटता है। जब कोई गेंद दृढ़तापूर्वक पकड़े गए भारी बल्ले से टकराती है, तो भी ऐसा ही होता है। तथापि, जब गेंद अपनी ओर आते हुए बल्ले से टकराती है, तो यह भिन्न चाल से वापस लौटती है। उस स्थिति में गेंद की चाल अपेक्षाकृत कम होती है या अधिक? (अध्याय 6 प्रत्यास्थ संघट्टों से संबंधित आपकी याद ताजा कर सकेगा)। (b) पिस्टन लगे सिलिंडर में पिस्टन को अंदर की ओर धकेल कर जब किसी गैस को संपीडित किया जाता है, तो उस गैस का ताप बढ़ जाता है। ऊपर (a) में प्रयुक्त अणुगति सिद्धांत के आधार पर इस प्रेक्षण की व्याख्या कीजिए। (c) पिस्टन लगे सिलिंडर में संपीडित गैस जब पिस्टन को बाहर धकेलकर फैलती है तो क्या होता है? तब आप क्या प्रेक्षण करेंगे? (d) खेलते समय सचिन तेंदुलकर एक भारी बल्ले का उपयोग करते हैं। इससे क्या उनको किसी प्रकार की कोई सहायता मिलती है?

हल (a) माना कि बल्ले के पीछे लगे विकिटों के सापेक्ष गेंद की चाल u है। यदि विकिटों के सापेक्ष बल्ला V चाल से गेंद की ओर आ रहा हो तो बल्ले के सापेक्ष गेंद की चाल $V + u$ होगी, जो बल्ले की ओर प्रभावी होगी। भारी बल्ले से टकराकर जब गेंद वापस लौटती है तो बल्ले के सापेक्ष इसकी चाल $V + u$ बल्ले से दूर की ओर होगी। अतः विकिट के सापेक्ष, लौटती हुई गेंद की चाल, $V + (V + u) = 2V + u$, विकिट से परे जाती हुई होगी। अतः इस प्रकार गतिमान बल्ले से संघट्ट के पश्चात् गेंद की चाल बढ़ जाती है। यदि बल्ला भारी नहीं है तो प्रतिपेक्ष चाल u से कम होगी। अणु के लिए इसका अर्थ ताप में वृद्धि होगा।

(a) के उत्तर के आधार पर, अब आप, (b) (c), (d) के उत्तर दे सकते हैं।

(संकेत: इस संगतता पर ध्यान दें, पिस्टन → बल्ला, सिलिंडर → विकिट, अणु → गेंद)। ◀

12.5 ऊर्जा के समविभाजन का नियम

किसी एकल अणु की गतिज ऊर्जा होती है :

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 \quad (12.22)$$

T ताप पर, तापीय साम्य में किसी गैस की औसत ऊर्जा का मान $<\varepsilon_t>$ द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है, अतः

$$\langle\varepsilon_t\rangle = \left\langle\frac{1}{2}mv_x^2\right\rangle + \left\langle\frac{1}{2}mv_y^2\right\rangle + \left\langle\frac{1}{2}mv_z^2\right\rangle = \frac{3}{2}k_BT \quad (12.23)$$

क्योंकि यहाँ कोई वरीय दिशा नहीं है, अतः समीकरण (12.23) से इंगित होता है कि

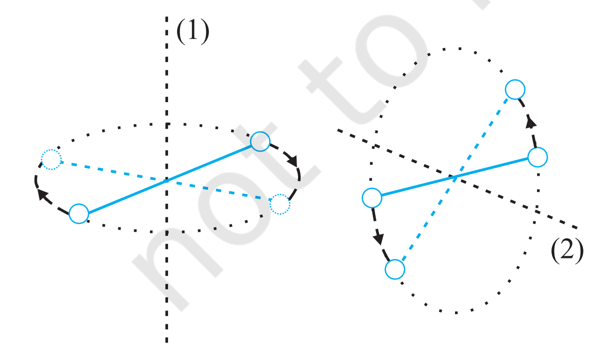
$$\left\langle\frac{1}{2}\ mv_x^2\right\rangle = \frac{1}{2}\ k_BT\ ; \left\langle\frac{1}{2}\ mv_y^2\right\rangle = \frac{1}{2}\ k_BT\ ;$$

$$\left\langle\frac{1}{2}\ mv_z^2\right\rangle = \frac{1}{2}\ k_BT \quad (12.24)$$

दिक्स्थान में गति के लिए स्वतंत्र किसी अणु की स्थिति दर्शाने के लिए हमें तीन निर्देशांकों की आवश्यकता होती है। यदि इसकी गति किसी एक समतल में बाध्य कर दी जाए, तो दो निर्देशांकों की, और यदि इसे किसी सरल रेखा के अनुदिश गति के लिए बाध्य कर दिया जाए, तो केवल एक निर्देशांक की आवश्यकता होगी। इसे एक दूसरे ढंग से भी व्यक्त किया जा सकता है। हम कहते हैं कि सरल रेखीय गति के लिए इसकी स्वातंत्र्य कोटि एक है, समतल गति की स्वातंत्र्य कोटि दो तथा दिक्स्थान में गति के लिए स्वातंत्र्य कोटि तीन है। किसी संपूर्ण पिण्ड की एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक गति को स्थानांतरीय गति कहते हैं। अतः, दिक्स्थान में गति के लिए स्वतंत्र अणु की तीन स्वातंत्र्य कोटि होती हैं। प्रत्येक स्थानांतरीय स्वतंत्रता की एक स्वातंत्र्य कोटि होती है, जिसमें गति के किसी चर का वर्ग सम्मिलित होता है, उदारहणार्थ यहाँ – mv_x^2 और इसी के सदृश पद v_y एवं v_z हैं। समीकरण (12.24) में हम देखते हैं कि तापीय साम्य में इस प्रकार के प्रत्येक पद का औसत मान – k_BT है।

आर्गन जैसी एकपरमाणुक गैस के अणुओं में केवल स्थानांतरीय स्वातंत्र्य कोटि होती है। लेकिन O_2 या N_2 जैसी द्विपरमाणुक गैसों के विषय में क्या कह सकते हैं? O_2 के अणु में 3 स्थानांतरीय स्वातंत्र्य कोटि तो होती ही हैं, पर, इनके अतिरिक्त यह अणु अपने द्रव्यमान केंद्र के परितः घूर्णन गति भी कर सकते हैं। चित्र 12.6 में, ऑक्सीजन के दो परमाणुओं को जोड़ने वाली रेखा के लंबवत् दो स्वतंत्र घूर्णन अक्ष 1 एवं 2 दर्शाए गए हैं जिनके परितः अणु घूर्णन गति कर सकता है*। अतः इन अणुओं में प्रत्येक की दो घूर्णी स्वातंत्र्य कोटि होती हैं। इस प्रकार कुल ऊर्जा में स्थानांतरीय ऊर्जा ε_t एवं घूर्णी ऊर्जा ε_r दोनों का योगदान होता है।

$$\varepsilon_t + \varepsilon_r = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 \qquad (12.25)$$



चित्र 12.6 द्विपरमाणुक अणु के दो स्वतंत्र घूर्णन अक्ष।

यहाँ ω_1 एवं ω_2 क्रमशः अक्षों 1 एवं 2 के परितः कोणीय चाल तथा I_1 एवं I_2 उनके संगत जड़त्व-आघूर्ण हैं। ध्यान दीजिए, प्रत्येक घूर्णी स्वातंत्र्य कोटि ऊर्जा में एक पद का योगदान करती है जिसमें घूर्णी गति के किसी चर का वर्ग सम्मिलित होता है।

ऊपर हमने यह मान लिया है, कि O_2 अणु एक "दृढ़ घूर्णी" है, अर्थात्, यह अणु कंपन नहीं करता। O_2 के लिए यह पूर्वधारणा, यद्यपि (सामान्य ताप पर) सही पाई गई है, पर सदैव मान्य नहीं होती। CO जैसे कुछ अणु, सामान्य ताप पर भी कुछ कंपन करते हैं, अर्थात् इनके परमाणु, अंतरापरमाणुक अक्ष के अनुदिश एकविमीय कंपन करते हैं (ठीक वैसे ही जैसे एकविमीय लोलक) और परिणामतः कुल ऊर्जा में एक पद, ε_v कंपन ऊर्जा का भी होता है, यहाँ,

$$\varepsilon_v = \frac{1}{2}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}ky^2$$

जहाँ k लोलक का बल नियतांक एवं y इसका कंपन निर्देशांक है। अब,

$$\varepsilon = \varepsilon_t + \varepsilon_r + \varepsilon_v \qquad (12.26)$$

पुनः ध्यान दीजिए, समीकरण (12.26) में दिए गए कंपन-ऊर्जा पद में, गति के कंपन चरों y एवं dy/dt के वर्ग सम्मिलित हैं।

यह भी देखिए कि प्रत्येक स्थानांतरीय एवं घूर्णी स्वातंत्र्य कोटि ने तो एक ही "वर्गित पद" का योगदान किया है, पर समीकरण (12.26) में दिए गए कंपन स्वातंत्र्य कोटि के सापेक्ष पद में गतिज एवं स्थितिज ऊर्जा व्यक्त करने वाले दो वर्गित पद हैं।

ऊर्जा के व्यंजक में प्रत्येक द्विघाती पद अणु द्वारा ऊर्जा अवशोषित करने का एक ढंग बताता है। हम देख चुके हैं कि परम ताप T पर तापीय साम्यावस्था में स्थानांतरीय गति के प्रत्येक ढंग के लिए औसत ऊर्जा ½ k_BT है। सर्वप्रथम मैक्सवेल द्वारा सिद्ध किए गए चिर प्रतिष्ठित सांख्यिकीय यांत्रिकी के सर्वाधिक परिष्कृत सिद्धांत के अनुसार ऊर्जा के विभाजन के प्रत्येक ढंग में ऐसा ही होता है चाहे ऊर्जा स्थानांतरीय हो, घूर्णी हो या कंपन ऊर्जा हो। अर्थात् तापीय साम्य में, ऊर्जा समान रूप से सभी संभव ऊर्जा रूपों पर बंटित होती है और प्रत्येक रूप में औसत ऊर्जा ½ k_BT पाई जाती है। यही **ऊर्जा का समविभाजन नियम** है। तदनुसार, किसी अणु की स्थानांतरीय एवं घूर्णी स्वातंत्र्य कोटियों में प्रत्येक ½ k_BT ऊर्जा का योगदान देती है

* परमाणुओं को मिलाने वाली रेखा के परितः घूर्णन का जड़त्व आघूर्ण बहुत कम होता है और क्वांटम यांत्रिकीय कारणों से प्रभावी नहीं हो पाता। अनुभाग 12.6 का अंतिम भाग देखिए।

जबकि प्रत्येक कंपन आवृत्ति $2 \times \frac{1}{2} k_B T = k_B T$ ऊर्जा का योगदान देती है, क्योंकि, कंपन रूप में गतिज और स्थितिज दोनों प्रकार की ऊर्जाओं का योगदान होता है।

ऊर्जा के समविभाजन नियम की उपपत्ति इस पुस्तक की विषय वस्तु से बाहर है। यहाँ हम सैद्धांतिक रूप से गैसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता ज्ञात करने के लिए इस नियम का उपयोग करेंगे। बाद में ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता के लिए भी इसके उपयोग का संक्षिप्त विवरण देंगे।

12.6 विशिष्ट ऊष्मा धारिता

12.6.1 एकपरमाणुक गैसों के लिए

एकपरमाणुक गैस के अणु में केवल तीन स्थानांतरीय स्वातंत्र्य कोटि होती हैं। अतः इनके एक अणु की T ताप पर औसत ऊर्जा $(3/2)k_B T$ होगी। इस प्रकार की गैस के 1 मोल की कुल आंतरिक ऊर्जा,

$$U = \frac{3}{2}k_B T \times N_A = \frac{3}{2}RT \tag{12.27}$$

नियत आयतन पर मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता C_v का मान है,

$$C_v \text{ (एकपरमाणुक गैस के लिए)} = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2}RT \tag{12.28}$$

आदर्श गैस के लिए

$$C_p - C_v = R \tag{12.29}$$

जहाँ, C_p नियत दाब पर मोलर विशिष्ट ऊष्माधारिता है।

अतः, $$C_p = \frac{5}{2} R \tag{12.30}$$

इन दो विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं का अनुपात

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3} \tag{12.31}$$

12.6.2 द्विपरमाणुक गैसों के लिए

जैसा पहले स्पष्ट किया जा चुका है कि द्विपरमाणुक अणु की आकृति डंबलाकार होती है और यदि इस आकृति को दृढ़ घूर्णी मानें, तो इसकी 5 स्वातंत्र्य कोटि हैं : 3 स्थानांतरीय एवं 2 घूर्णी। ऊर्जा समविभाजन के नियमानुसार इस प्रकार की गैस के एक मोल की, T ताप पर कुल आंतरिक ऊर्जा,

$$U = \frac{5}{2}k_B T \times N_A = \frac{5}{2} RT \tag{12.32}$$

अतः मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिताएँ

$$C_v \text{ (दृढ़ द्विपरमाणुक)} = \frac{5}{2}R,\ C_p = \frac{7}{2}R \tag{12.33}$$

$$\gamma \text{ (दृढ़ द्विपरमाणुक)} = \frac{7}{5} \tag{12.34}$$

यदि द्विपरमाणुक अणु दृढ़ नहीं है, वरन् इसमें एक अतिरिक्त कंपन रूप भी सम्मिलित है, तो

$$U = \left(\frac{5}{2}k_B T + k_B T\right) N_A = \frac{7}{2}RT$$

$$C_v = \frac{7}{2}R,\ C_p = \frac{9}{2}R,\ \gamma = \frac{9}{7}R \tag{12.35}$$

12.6.3 बहुपरमाणुक गैसों के लिए

व्यापक रूप में किसी बहुपरमाणुक अणु में 3 स्थानांतरीय, 3 घूर्णी स्वातंत्र्य कोटि एवं कुछ निश्चित संख्या (f) के कंपन रूप होते हैं। ऊर्जा समविभाजन के नियमानुसार यह सुगमता से समझा जा सकता है कि इस प्रकार की गैस के 1 मोल की कुल आंतरिक ऊर्जा

$$U = \left(\frac{3}{2}\ k_B T + \frac{3}{2}\ k_B T + f k_B T\right) N_A$$

अर्थात् $C_v = (3 + f)\, R;\quad C_p = (4 + f)\, R,$

$$\gamma = \frac{(4+f)}{(3+f)} \tag{12.36}$$

ध्यान दीजिए, $C_p - C_v = R$ सभी आदर्श गैसों के लिए सत्य है, फिर चाहे वह गैस एकपरमाणुक हो, द्विपरमाणुक हो अथवा बहुपरमाणुक भी क्यों न हो।

सारणी (12.1) में, गैसों में, कंपन रूपों की उपेक्षा करते हुए, उनकी विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के विषय में सैद्धांतिक पूर्वानुमानों को सूचीबद्ध किया गया है। ये मान सारणी (12.2) में दिए गए कई गैसों के लिए विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के प्रायोगिक मानों से काफी मेल खाते हैं। यह सत्य है, कि ऐसी कई गैसे हैं (जो सारणी में नहीं दर्शाई गई हैं), जैसे Cl_2, C_2H_6 और बहुत सी बहुपरमाणुक गैसें, जिनके प्रायोगिक और सैद्धांतिक

सारणी 12.1 गैसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के पूर्वानुमानित मान (कंपन रूपों की उपेक्षा करते हुए)

गैस की प्रकृति	C_v (J mol^{-1} K^{-1})	C_p (J mol^{-1} K^{-1})	$C_p - C_v$ (J mol^{-1} K^{-1})	γ
एकपरमाणुक	12.5	20.8	8.31	1.67
द्विपरमाणुक	20.8	29.1	8.31	1.40
त्रिपरमाणुक	24.93	33.24	8.31	1.33

सारणी 12.2 कुछ गैसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के मापित मान

गैस की प्रकृति	गैस	C_v (J mol^{-1} K^{-1})	C_p (J mol^{-1} K^{-1})	$C_p - C_v$ (J mol^{-1} K^{-1})	γ
एकपरमाणुक	He	12.5	20.8	8.30	1.66
एकपरमाणुक	Ne	12.7	20.8	8.12	1.64
एकपरमाणुक	Ar	12.5	20.8	8.30	1.67
द्विपरमाणुक	H_2	20.4	28.8	8.45	1.41
द्विपरमाणुक	O_2	21.0	29.3	8.32	1.40
द्विपरमाणुक	N_2	20.8	29.1	8.32	1.40
त्रिपरमाणुक	H_2O	27.0	35.4	8.35	1.31
बहुपरमाणुक	CH_4	27.1	35.4	8.36	1.31

मानों में बहुत अंतर पाया गया है। साधारणत: इन गैसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के मान सारणी (12.1) में दिए गए सैद्धांतिक मानों से अधिक पाए गए हैं। इसका अर्थ यह हुआ कि यदि हम परिकलनों में कंपन रूपों के योगदान को भी सम्मिलित करें, तो प्रायोगिक एवं सैद्धांतिक मानों में अधिक संगति दृष्टिगोचर होगी। अत:, सामान्य ताप पर ऊर्जा समविभाजन का नियम, प्रायोगिक रूप से अच्छी तरह पुष्ट होता है।

उदाहरण 12.8 44.8 लीटर नियत धारिता के एक बेलनाकार बर्तन में STP पर हीलियम गैस भरी है। इस गैस के ताप में 15.0 °C वृद्धि करने के लिए कितनी ऊष्मा की आवश्यकता होगी? ($R = 8.31$ J mo1^{-1} K^{-1})

हल : गैस नियम $PV = \mu RT$ का उपयोग करके आप यह आसानी से दर्शा सकते हैं कि किसी भी आदर्श गैस के 1 मोल का, मानक ताप (273 K) एवं दाब (1 atm = 1.01×10^5 Pa) पर आयतन 22.4 लीटर होता है। इस सार्वत्रिक आयतन को 'मोलर आयतन' कहते हैं। अत: इस उदाहरण में बर्तन के भीतर हीलियम के 2 मोल हैं। क्योंकि हीलियम एकपरमाणु गैस है, इसकी नियत आयतन पर विशिष्ट ऊष्मा धारिता $C_v = (3/2)\ R$, तथा नियत दाब पर विशिष्ट ऊष्मा धारिता $C_p = (5/2)\ R$ है। क्योंकि बर्तन का आयतन नियत है, आवश्यक ऊष्मा ज्ञात करने के लिए C_v का उपयोग करेंगे। अत:

आवश्यक ऊष्मा = मोलों की संख्या × मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता × तापवृद्धि

$$= 2 \times 1.5\ R \times 15.0 = 45\ R$$

$$= 45 \times 8.31 = 374\ \text{J}$$

12.6.4 ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता

ठोसों की विशिष्ट ऊष्माधारिता ज्ञात करने के लिए भी हम ऊर्जा समविभाजन का नियम लागू कर सकते हैं। किसी ठोस के विषय में विचार कीजिए, जो N परमाणुओं का बना है। प्रत्येक परमाणु अपनी माध्य स्थिति के इधर-उधर कंपन कर रहा है। किसी एकविमीय कंपन की औसत ऊर्जा $2 \times ½\ k_B T = k_B T$ है। त्रिविमीय कंपनों के लिए औसत ऊर्जा $3\ k_B T$ है। ठोस के 1 मोल के लिए $N = N_A$ और इसकी कुल आंतरिक ऊर्जा

$$U = 3\ k_B T \times N_A = 3\ RT$$

अब, नियत दाब पर $\Delta Q = \Delta U + P\Delta V = \Delta U$, क्योंकि किसी ठोस के लिए ΔV उपेक्षणीय है। अत:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} = 3R \tag{12.37}$$

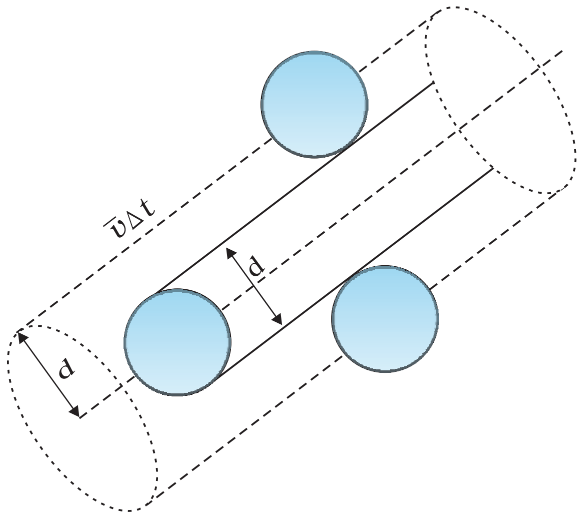
सारणी 12.3 कमरे के ताप एवं वायुमंडलीय दाब पर कुछ ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के मान

पदार्थ का नाम	विशिष्ट ऊष्मा धारिता (J kg^{-1} K^{-1})	मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता (J mol^{-1} K^{-1})
ऐलुमिनियम	900.0	24.4
कार्बन	506.5	6.1
ताँबा	386.4	24.5
सीसा	127.7	26.5
चाँदी	236.1	25.5
टंग्स्टन	134.4	24.9

सारणी 12.3 दर्शाती है कि व्यापक रूप से, सामान्य ताप पर प्राप्त प्रायोगिक मान प्रागुक्त मानों से मेल खाते हैं। (कार्बन एक अपवाद है)।

12.7 माध्य मुक्त पथ

गैसों में अणुओं की गति काफी अधिक, वायु में ध्वनि के वेग की कोटि के बराबर होती है। तो भी, रसोईघर में सिलिंडर से लीक हुई गैस को कमरे के दूसरे कोने तक विसरित होने में काफी अधिक समय लगता है। वायुमंडल में धुएँ का बादल घंटों तक बना रहता है। ऐसा इसलिए होता है, क्योंकि, गैस के अणु एक परिमित, पर अत्यंत छोटी आमाप के होते हैं। इसीलिए वे परस्पर टकराते रहने के लिए बाध्य हैं। परिणामस्वरूप, वे अबाध्य रूप से, सरल रेखा में चलते नहीं रह सकते, उनका पथ निरंतर परिवर्तित रहता है।



चित्र 12.7 Δt *समय में किसी अणु द्वारा प्रसर्पित आयतन जिसमें कोई दूसरा अणु इससे टकराएगा।*

मान लीजिए, किसी गैस के अणु d व्यास के गोले हैं। यहाँ हम अपना ध्यान किसी ऐसे गतिमान अणु पर केंद्रित करेंगे जिसकी माध्य चाल $<v>$ है। यह किसी भी ऐसे दूसरे अणु से संघट्ट करेगा जो इन दो अणुओं के केंद्रों के बीच की दूरी d के अंदर आ जाएगा। Δt समय में यह आयतन ($\pi d^2 <v> \Delta t$) तय करता है जिसमें आने वाला कोई अणु इससे टकराएगा (देखें चित्र 12.7)। यदि प्रति एकांक आयतन में अणुओं की संख्या n हो तो कोई अणु Δt समय में $n\pi d^2 <v> \Delta t$ संघट्ट करेगा। इस प्रकार संघट्टों की दर $n\pi d^2 <v>$ है। अथवा दो क्रमिक संघट्टों के बीच औसत अंतराल,

$$\tau = 1/(n\pi <v> d^2) \tag{12.38}$$

किन्हीं दो क्रमिक संघट्टों के बीच की औसत दूरी, जिसे माध्य मुक्त पथ (l) कहते हैं, होगा :

$$l = <v> \tau = 1/(n\pi d^2) \tag{12.39}$$

इस व्युत्पत्ति में हमने यह कल्पना की है कि दूसरे सभी अणु विरामावस्था में हैं। परंतु वास्तव में सभी अणु गतिमान हैं और संघट्ट दर अणुओं के औसत आपेक्षिक वेग द्वारा निर्धारित की जाती है। अत: हमें समीकरण (12.38) में $<v>$ को $<v_r>$ से प्रतिस्थापित करना होगा। अत: अधिक यथार्थ व्युत्पत्ति द्वारा

$$l = 1/\left(\sqrt{2}\ n\pi d^2\right) \tag{12.40}$$

आइये, अब हम वायु के अणुओं के लिए, STP पर औसत वेग $<v>$ = (485m/s) लेकर l एवं T का आकलन करते हैं।

$$n = \frac{(0.02 \times 10^{23})}{(22.4 \times 10^{-3})}$$

$$= 2.7 \times 10^{25}\ \text{m}^{-3}$$

$d = 2 \times 10^{-10}$ m लेने पर,

$\tau = 6.1 \times 10^{-10}$ s

तथा, $l = 2.9 \times 10^{-7}\ \text{m} \approx 1500d$ (12.41)

जैसी अपेक्षा थी, समीकरण (12.40) द्वारा दिया गया माध्य मुक्त पथ का मान अणु की आमाप एवं संख्या घनत्व पर प्रतिलोमत: निर्भर करता है। किसी अत्यधिक निर्वातित नली में चाहे n कितना भी कम क्यों न हो, माध्य मुक्त पथ का मान नली की लंबाई के बराबर हो सकता है।

उदाहरण 12.9 373 K पर, जल वाष्प में, जल के अणु के माध्य मुक्त पथ का आकलन कीजिए। उदाहरण 12.1 और समीकरण (12.41) में दी गई सूचनाओं का उपयोग कीजिए।

हल जल वाष्प के लिए d का मान, इसका वायु के लिए मान बराबर होता है। संख्या घनत्व परम ताप के व्युत्क्रमानुपाती है।

$$\text{इसलिए}\ n = 2.7 \times 10^{25} \times \frac{273}{373} = 2 \times 10^{25}\ \text{m}^{-3}$$

अत: माध्य मुक्त पथ $l = 4 \times 10^{-7}$ m

ध्यान दीजिए, माध्य मुक्त पथ, पूर्व परिकलनों द्वारा ज्ञात अंतरापरमाणुक दूरी ~ 40 Å = 4 ×10^{-9} m की तुलना में 100 गुनी है। माध्य मुक्त पथ का यह बड़ा मान ही गैसों के प्रारूपिक व्यवहार का मार्गदर्शक है। बिना किसी धारक पात्र के गैसों को सीमित नहीं किया जा सकता है।

अणुगति सिद्धांत का उपयोग करके, श्यानता, ऊष्मा-चालकता, एवं विसरण जैसे स्थूल मेय गुणों को आण्विक आमाप जैसे अतिसूक्ष्म प्राचलों से संबंधित किया जा सकता है। इसी तरह के संबंधों से ही सर्वप्रथम अणुओं की आमाप का आकलन किया गया था।

सारांश

1. दाब (P), आयतन (V) और परम ताप (T) में संबंध स्थापित करने वाली आदर्श गैस समीकरण है,
$$PV = \mu RT = k_B NT$$
यहाँ μ गैस में मोलों की संख्या और N अणुओं की संख्या है। R तथा k_B क्रमश: सार्वत्रिक गैस नियतांक एवं बोल्ट्ज़मान नियतांक हैं।

$R = 8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}, \quad k_B = \dfrac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$

वास्तविक गैसें, आदर्श गैस समीकरण का अधिकाधिक पालन केवल उच्च ताप तथा निम्न दाब पर ही करती हैं।

2. आदर्श गैस के अणुगति सिद्धांत के अनुसार

$$P = \frac{1}{3} n m \overline{v^2}$$

यहाँ n अणुओं का संख्या घनत्व, m अणु का द्रव्यमान एवं $\overline{v^2}$ इनकी माध्य वर्ग चाल है। इसको आदर्श गैस समीकरण के साथ मिलाने से ताप की एक अणुगतिक व्याख्या प्राप्त होती है,

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} k_B T, \quad v_{rms} = \left(\overline{v^2}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

इससे हमें यह ज्ञात होता है कि किसी गैस का ताप उसके किसी अणु की औसत गतिज ऊर्जा की माप है और यह गैस या अणु की प्रकृति पर निर्भर नहीं करता। एक नियत ताप पर गैसों के मिश्रण में भारी अणु की औसत चाल अपेक्षाकृत कम होती है।

3. स्थानांतरीय गतिज ऊर्जा

$$E = \frac{3}{2} k_B N T$$

इससे हमें यह सूत्र प्राप्त होता है-

$$PV = \frac{2}{3} E$$

4. ऊर्जा समविभाजन का नियम बताता है कि यदि एक निकाय परमताप T पर साम्यावस्था में है तो कुल ऊर्जा समान रूप से विभिन्न ऊर्जा रूपों में बँट कर अवशोषित होती है और हर रूप के साथ जुड़ी यह ऊर्जा – $k_B T$ होती है। प्रत्येक स्थानांतरीय एवं घूर्णी स्वातंत्र्य कोटि के संगत अवशोषण का एक ऊर्जा रूप होता है और इससे जुड़ी ऊर्जा – $k_B T$ होती है। प्रत्येक कंपन आवृत्ति के साथ ऊर्जा के दो रूप (गतिज एवं स्थितिज) जुड़ते हैं इसलिए इसके संगत ऊर्जा = 2 × – $k_B T = k_B T$

5. ऊर्जा समविभाजन का नियम लागू करके हम गैसों की मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता ज्ञात कर सकते हैं और इस प्रकार प्राप्त विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के मान कई गैसों के प्रयोगों द्वारा प्राप्त विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के मानों से मिलते हैं। यदि गति के कंपन रूपों को भी परिकलनों में सम्मिलित करें तो यह साम्यता और भी सटीक बैठेगी।

6. माध्य मुक्त पथ l अणु के दो क्रमिक संघट्टों के बीच उसके द्वारा चलित औसत दूरी है

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}\, n \pi d^2}$$

जहाँ n संख्या घनत्व एवं d अणु का व्यास है।

विचारणीय विषय

1. किसी तरल का दाब केवल धारक की दीवारों पर ही आरोपित नहीं होता, बल्कि यह तरल में हर जगह विद्यमान रहता है। बर्तन में रखे गैस के आयतन में कोई परत साम्यावस्था में होती है क्योंकि इस परत के दोनों ओर समान दाब होता है।

2. गैस में अंतरापरमाणुक दूरी के संबंध में हमें बहुत बढ़ा-चढ़ा कर कोई धारणा नहीं बनानी चाहिए। सामान्य ताप और दाब पर यह ठोसों और द्रवों में अंतरापरमाणुक दूरी के लगभग दस गुने के बराबर है। बहुत भिन्न अगर कुछ है तो वह माध्य मुक्त पथ है जो किसी गैस में अंतरापरमाणुक दूरी का 100 गुना और अणु की आमाप का 1000 गुना होता है।

3. ऊर्जा समविभाजन के नियम को हम इस प्रकार कह सकते हैं– तापीय साम्य में प्रत्येक स्वातंत्र्य कोटि के साथ ½ $k_B T$ ऊर्जा जुड़ी होती है। अणु की कुल ऊर्जा के व्यंजक में प्रत्येक द्विघाती पद एक स्वातंत्र्य कोटि गिना जाना चाहिए। अत:, प्रत्येक कंपन-विधा में दो स्वातंत्र्य कोटि (न कि एक) होते हैं (गतिज एवं स्थितिज रूपों के संगत) जिनकी ऊर्जा $2 \times ½\ k_B T = k_B T$ होती है।

4. किसी कमरे में वायु के सब अणु नीचे नहीं गिर जाते (गुरुत्व के कारण) तथा फर्श पर आकर नहीं ठहर जाते क्योंकि वह बहुत वेग से गतिमान होते हैं और निरंतर संघट्ट करते रहते हैं। साम्यावस्था में कम ऊँचाइयों पर घनत्व थोड़ा अधिक होता है (जैसे वायुमण्डल में)। इसका प्रभाव कम है, क्योंकि सामान्य ऊँचाइयों के लिए स्थितिज ऊर्जा (mgh) का मान अणु की औसत गतिज ऊर्जा $1/2\ mv^2$ की तुलना में काफी कम है।

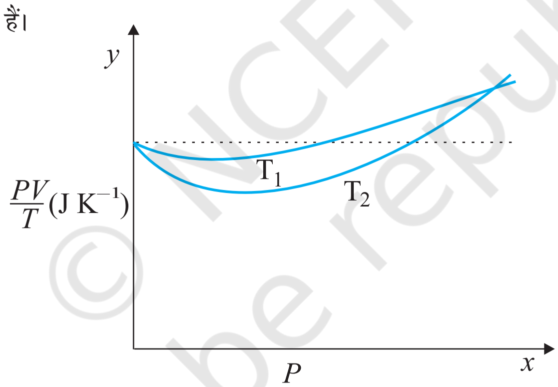
5. $< v^2 >$ सदैव $(< v >)^2$ के बराबर नहीं होता। किसी राशि के वर्ग का माध्य आवश्यक नहीं है कि उस राशि के माध्य के वर्ग के बराबर हो। क्या आप इस कथन की पुष्टि के लिए उदाहरण बता सकते हैं?

अभ्यास

12.1 ऑक्सीजन के अणुओं के आयतन और STP पर इनके द्वारा घेरे गए कुल आयतन का अनुपात ज्ञात कीजिए। ऑक्सीजन के एक अणु का व्यास 3 Å लीजिए।

12.2 मोलर आयतन, STP पर किसी गैस (आदर्श) के 1 मोल द्वारा घेरा गया आयतन है। (STP : 1 atm दाब, 0 °C)। दर्शाइये कि यह 22.4 लीटर है।

12.3 चित्र 12.8 में ऑक्सीजन के 1.00×10^{-3} kg द्रव्यमान के लिए PV/T एवं P में, दो अलग-अलग तापों पर ग्राफ दर्शाये गए हैं।



चित्र 12.8

(a) बिंदुकित रेखा क्या दर्शाती है?
(b) क्या सत्य है : $T_1 > T_2$ अथवा $T_1 < T_2$?
(c) y-अक्ष पर जहाँ वक्र मिलते हैं वहाँ PV/T का मान क्या है?
(d) यदि हम ऐसे ही ग्राफ 1.00×10^{-3} kg हाइड्रोजन के लिए बनाएँ तो भी क्या उस बिंदु पर जहाँ वक्र y-अक्ष से मिलते हैं PV/T का मान यही होगा? यदि नहीं तो हाइड्रोजन के कितने द्रव्यमान के लिए PV/T का मान (कम दाब और उच्च ताप के क्षेत्र के लिए वही होगा? H_2 का अणु द्रव्यमान = 2.02 u, O_2 का अणु द्रव्यमान = 32.0 u, R = 8.31 J mo1^{-1} K^{-1})

12.4 एक ऑक्सीजन सिलिंडर जिसका आयतन 30 लीटर है, में ऑक्सीजन का आरंभिक दाब 15 atm एवं ताप 27 °C है। इसमें से कुछ गैस निकाल लेने के बाद प्रमापी (गेज) दाब गिर कर 11 atm एवं ताप गिर कर 17 °C हो जाता है। ज्ञात कीजिए कि सिलिंडर से ऑक्सीजन की कितनी मात्रा निकाली गई है। (R = 8.31 J mol^{-1} K^{-1}, ऑक्सीजन का अणु द्रव्यमान O_2 = 32 u)।

12.5 वायु का एक बुलबुला, जिसका आयतन $1.0\ cm^3$ है, 40 m गहरी झील की तली से जहाँ ताप 12 °C है, उठकर ऊपर पृष्ठ पर आता है जहाँ ताप 35 °C है। अब इसका आयतन क्या होगा?

12.6 एक कमरे में, जिसकी धारिता $25.0\ m^3$ है, 27 °C ताप और 1 atm दाब पर, वायु के कुल अणुओं (जिनमें नाइट्रोजन, ऑक्सीजन, जलवाष्प और अन्य सभी अवयवों के कण सम्मिलित हैं) की संख्या ज्ञात कीजिए।

12.7 हीलियम परमाणु की औसत तापीय ऊर्जा का आकलन कीजिए (i) कमरे के ताप (27 °C) पर। (ii) सूर्य के पृष्ठीय ताप (6000 K) पर। (iii) 100 लाख केल्विन ताप (तारे के क्रोड का प्रारूपिक ताप) पर।

12.8 समान धारिता के तीन बर्तनों में एक ही ताप और दाब पर गैसें भरी हैं। पहले बर्तन में नियॉन (एकपरमाणुक) गैस है, दूसरे में क्लोरीन (द्विपरमाणुक) गैस है और तीसरे में यूरेनियम हेक्साफ्लोराइड (बहुपरमाणुक) गैस है। क्या तीनों बर्तनों में गैसों के संगत अणुओं की संख्या समान है? क्या तीनों प्रकरणों में अणुओं की v_{rms} (वर्ग माध्य मूल चाल) समान है।

12.9 किस ताप पर आर्गन गैस सिलिंडर में अणुओं की v_{rms}, – 20 °C पर हीलियम गैस परमाणुओं की v_{rms} के बराबर होगी। (Ar का परमाणु द्रव्यमान = 39.9 u, एवं हीलियम का परमाणु द्रव्यमान = 4.0 u)।

12.10 नाइट्रोजन गैस के एक सिलिंडर में, 2.0 atm दाब एवं 17 °C ताप पर, नाइट्रोजन अणुओं के माध्य मुक्त पथ एवं संघट्ट आवृत्ति का आकलन कीजिए। नाइट्रोजन अणु की त्रिज्या लगभग 1.0 Å लीजिए। संघट्ट-काल की तुलना अणुओं द्वारा दो संघट्टों के बीच स्वतंत्रतापूर्वक चलने में लगे समय से कीजिए। (नाइट्रोजन का आण्विक द्रव्यमान = 28.0 u)।

11089CH14

अध्याय 13

दोलन

13.1 भूमिका
13.2 दोलन और आवर्ती गति
13.3 सरल आवर्त गति
13.4 सरल आवर्त गति तथा एकसमान वर्तुल गति
13.5 सरल आवर्त गति में वेग तथा त्वरण
13.6 सरल आवर्त गति के लिए बल नियम
13.7 सरल आवर्त गति में ऊर्जा
13.8 सरल आवर्त गति निष्पादित करने वाले कुछ निकाय

सारांश
विचारणीय विषय
अभ्यास

13.1 भूमिका

हम अपने दैनिक जीवन में विभिन्न प्रकार की गतियाँ देखते हैं। इनमें से कुछ जैसे सरल रैखिक गति और किसी प्रक्षेप्य की गति के विषय में तो आप अध्ययन कर ही चुके हैं। ये दोनों ही गतियाँ अनावर्ती होती हैं। हमने एकसमान वर्तुल गति तथा सौर परिवार में ग्रहों की कक्षीय गतियों के विषय में भी अध्ययन कर लिया है। इन उदाहरणों में निश्चित समय-अंतराल के पश्चात् गति की पुनरावृत्ति होती है, अर्थात् यह आवर्ती होती है। आपने बचपन में अपने पालने अथवा झूले पर झूलने का आनन्द लिया होगा। यह दोनों गतियाँ पुनरावर्ती होती हैं, परंतु किसी ग्रह की आवर्ती गति से भिन्न होती हैं। यहाँ वस्तु किसी माध्य स्थिति के इधर-उधर गति करती है। दीवार-घड़ी का लोलक भी इसी प्रकार की गति करता है। इस प्रकार की अग्र-पश्च (आगे-पीछे) आवर्ती गति के प्रचुर उदाहरण हैं– नदी में डूबती-उतरती हुई नाव, वाष्प इंजन में अग्र और पश्च चलता हुआ पिस्टन आदि। इस प्रकार की गति को **दोलन गति** कहते हैं। इस अध्याय में हम इस गति के बारे में अध्ययन करेंगे।

दोलन गति का अध्ययन भौतिकी के लिए आधारभूत है; बहुत-सी भौतिक परिघटनाओं को समझने के लिए इसकी संकल्पना की आवश्यकता होती है। वाद्य यंत्रों; जैसे-सितार, गिटार अथवा वायलिन में हम कंपायमान डोरियों द्वारा रोचक ध्वनियाँ उत्पन्न होते हुए देखते हैं। ढोलों में झिल्लियाँ तथा टेलीफोन और ध्वनि विस्तारकों के स्पीकरों में डायफ्राम अपनी माध्य स्थिति के इधर-उधर कंपन करते हैं। वायु के अणुओं के कंपनों द्वारा ही ध्वनि-संचरण संभव हो पाता है। एक ठोस पदार्थ में अणु अपनी माध्य स्थितियों के परित: कम्पन करते हैं, कम्पन की औसत ऊर्जा तापमान के समानुपाती होती है। AC पावर ऐसी वोल्टता का संभरण करता है जो माध्य मान (शून्य) के धनात्मक तथा ऋणात्मक ओर एकांतर क्रम से दोलायमान रहता है।

किसी आवर्ती गति के व्यापक तथा दोलन गति के विशेष विवरण के लिए कुछ मूल संकल्पनाओं; जैसे–आवर्तकाल, आवृत्ति, विस्थापन, आयाम और कला की आवश्यकता होती है। अगले अनुभाग में इन संकल्पनाओं को विकसित किया गया है।

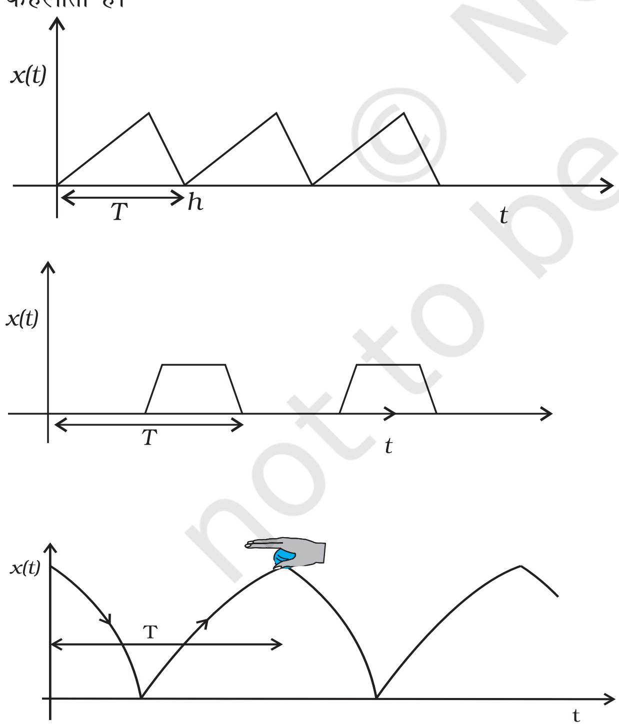
13.2 दोलन और आवर्ती गति

चित्र 13.1 में कुछ आवर्ती गतियाँ दर्शाई गई हैं। मान लीजिए कोई कीट किसी रैम्प पर चढ़ता है और गिर जाता है। वह अपने प्रारंभिक स्थान पर आ जाता है और इस प्रक्रिया को बार-बार दोहराता है। यदि आप जमीन से ऊपर इसकी ऊँचाई तथा समय के बीच ग्राफ खींचें तो यह चित्र 13.1(a) की तरह दिखेगा। यदि कोई बालक किसी सीढ़ी पर चढ़े और उतरे तथा इस प्रक्रिया को समान रूप से बार-बार दोहराये तो उसकी ऊँचाई तथा समय के बीच ग्राफ चित्र 13.1(b) के जैसा दिखेगा। जब आप किसी गेंद को अपनी हथेली से जमीन की तरफ बार-बार मारते हैं तो इसकी ऊँचाई और समय के बीच ग्राफ 13.1(c) के जैसा दिखेगा। ध्यान दीजिए कि चित्र 13.1(c) में दोनों वक्रीय भाग न्यूटन की गति समीकरण के अनुसार परवलय के अंश हैं, अनुभाग (2.6) देखिए।

$h = ut + \frac{1}{2}gt^2$ अधोमुखी गति के लिए, तथा

$h = ut - \frac{1}{2}gt^2$ उपरिमुखी गति के लिए,

इन समीकरणों में u का मान अलग परिस्थितियों के लिए भिन्न होगा। ये सभी आवर्ती गति के उदाहरण हैं। अत: कोई गति जो निश्चित अंतराल के बाद पुनरावृत्ति करती है ***आवर्ती गति*** कहलाती है।



चित्र 13.1 *आवृत्ति गति के उदाहरण। प्रत्येक अवस्था में आवर्तकाल T दर्शाया गया है।*

सामान्यत: आवर्ती गति करने वाले पिण्ड की एक संतुलन अवस्था होती है जो उसके गति के पथ में स्थित होता है। जब पिण्ड इस संतुलन अवस्था में होता है तो उस पर लगने वाला कुल बाह्य बल शून्य होता है। अत: यदि पिण्ड को इस अवस्था में विराम की स्थिति में छोड़ दें तो यह सदैव विरामावस्था में रहेगा। यदि पिण्ड को इस अवस्था से थोड़ा सा विस्थापित करें तो पिण्ड पर एक बल कार्य करने लगता है जो पिण्ड को पुन: उसकी संतुलन-अवस्था की ओर ले जाने का प्रयास करता है और फलस्वरूप पिण्ड में **दोलन** या **कंपन** उत्पन्न हो जाता है। उदाहरण के लिए यदि किसी कटोरे में एक गेंद रख दें तो गेंद कटोरे की तली पर संतुलन अवस्था में होती है। यदि इसको इस बिंदु से थोड़ा विस्थापित करें तो गेंद कटोरे में दोलन करने लगती है। प्रत्येक दोलन गति आवर्ती होती है परंतु प्रत्येक आवर्ती गति दोलनीय नहीं होती। वर्तुल गति भी आवर्ती होती है, परंतु दोलनीय नहीं होती है।

दोलन एवं कंपन में कोई मुख्य अंतर नहीं है। साधारणत: जब आवृत्ति का मान कम होता है तो हम गति को दोलनीय कहते हैं (जैसे किसी वृक्ष की टहनी की दोलन गति)। इसके विपरीत जब गति की आवृत्ति अधिक होती है तो हम गति को कंपन कहते हैं। जैसे किसी संगीत वाद्य के तार का कंपन।

सरल आवर्ती गति दोलनीय गति का एक सरल रूप है। यह तब होता है जब किसी दोलनीय वस्तु के ऊपर लगने वाला बल संतुलन अवस्था में इसके विस्थापन के समानुपाती होता है। पुन: वस्तु के दोलन के दौरान यह बल सदैव इस संतुलन अवस्था की तरफ निदेशित होता है। यह संतुलन अवस्था वस्तु की गति की माध्य स्थिति भी होती है।

व्यावहारिक रूप में सभी दोलनीय वस्तुएँ अंततोगत्वा अपनी संतुलन अवस्था को प्राप्त कर लेती हैं। क्योंकि इनकी गति में घर्षण तथा अन्य क्षयकारी बलों के कारण अवमंदन उत्पन्न होता है। परंतु कोई बाह्य आवर्ती बल लगाकर हम वस्तु को दोलनीय अवस्था में रख सकते हैं। इस पाठ के अंतिम अनुभागों में हम अवमंदित तथा प्रणोदित दोलनों का अध्ययन करेंगे।

किसी भी द्रव्यात्मक माध्यम को हम युग्मित दलित्रों का एक बड़ा समूह मान सकते हैं। इन दलित्रों के सामूहिक दोलन तरंग का रूप लेते हैं। जल तरंग, भूकम्पित तरंगें, विद्युत चुंबकीय तरंगें इन तरंगों के उदाहरण हैं। तरंगीय घटनाओं के विषय में हम अगले अध्याय में अध्ययन करेंगे।

13.2.1 आवर्तकाल तथा आवृत्ति

हमने देखा है कि कोई गति जिसकी किसी नियमित समय अंतराल पर स्वयं पुनरावृत्ति होती है **आवर्ती गति** कहलाती है। ***वह न्यूनतम समय अंतराल जिसके पश्चात् गति की पुनरावृत्ति होती है, इसका आवर्तकाल कहलाता है।*** अत: समय को हम

T द्वारा दर्शाते हैं। इसका SI मात्रक सेकंड है । उन आवर्ती गतियों के लिए, जो सेकंडों के पैमाने पर या तो बहुत तीव्र अथवा बहुत मंद होती हैं, समय के अन्य सुविधाजनक मात्रक उपयोग में लाए जाते हैं । किसी क्वार्ट्ज़ क्रिस्टल का कंपन काल माइक्रोसेकंड (10^{-6} s) के मात्रकों, जिसका प्रतीक μs है, में व्यक्त किया जाता है । इसके विपरीत बुध ग्रह की कक्षीय अवधि 88 भू-दिवस होती है। हेली धूमकेतु हर 76 वर्ष के पश्चात् पुन: दृष्टिगोचर होता है ।

आवर्तकाल 'T' के व्युत्क्रम से हमें प्रति इकाई समय में दोलनों की संख्या प्राप्त होती है। यह राशि **आवर्ती गति की आवृत्ति** कहलाती है । इसे प्रतीक υ द्वारा निरूपित किया जाता है । ν तथा T के मध्य निम्नलिखित पारस्परिक संबंध होता है:

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad (13.1)$$

इस प्रकार ν का मात्रक (s^{-1}) है । रेडियो तरंगों के आविष्कारक हेनरिख रुडोल्फ हर्ट्ज़ (1857-1894) के नाम पर आवृत्ति के मात्रक को एक विशेष नाम दिया गया । इसे हर्ट्ज़ (hertz प्रतीक Hz) कहते हैं । इस प्रकार,

1 हर्ट्ज़ = 1 Hz = 1 दोलन प्रति सेकंड = $1 s^{-1}$ (13.2)

ध्यान दीजिए, आवृत्ति का सदैव ही पूर्णांक होना आवश्यक नहीं है ।

▶ ***उदाहरण 13.1*** कोई मानव हृदय एक मिनट में औसतन 75 बार धड़कन करता पाया जाता है । इसकी आवृत्ति तथा आवर्तकाल परिकलित कीजिए ।

हल हृदय की धड़कन की आवृत्ति = 75/(1 मिनट)

= 75/(60 s)

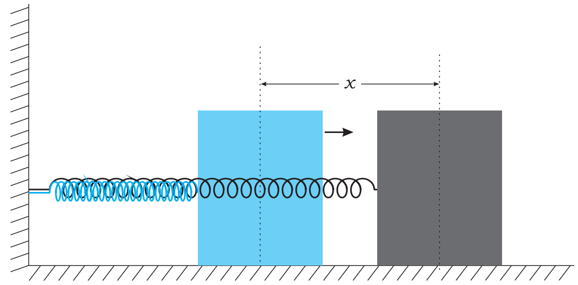
= $1.25\ s^{-1}$

आवर्तकाल, $T = 1/(1.25\ s^{-1})$

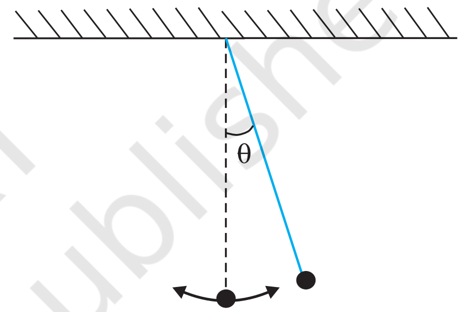
= 0.8 s ◀

13.2.2 विस्थापन

अनुभाग 3.2 में हमने किसी कण के विस्थापन को उसके स्थिति सदिश में परिवर्तन के रूप में परिभाषित किया था । इस अध्याय में हम विस्थापन नामक इस पद का उपयोग अधिक व्यापक अर्थों में करेंगे । यह किसी भी विचारणीय भौतिक गुण में समय के साथ परिवर्तन को निरूपित करेगा । उदाहरण के लिए, एक पृष्ठ पर किसी स्टील बॉल की सरल रेखीय गति के लिए, समय के फलन के रूप में आरंभ बिंदु से बॉल की दूरी इसका **स्थिति-विस्थापन** है । मूल बिंदु का चुनाव सुविधानुसार किया जा सकता है । मान लीजिए कोई गुटका किसी कमानी से जुड़ा है जिसका दूसरा सिरा किसी दृढ़ दीवार से संबद्ध है [देखिए चित्र 13.2 (a)] साधारणत: किसी पिण्ड का विस्थापन इसकी संतुलन अवस्था से मापना सरल होगा। किसी दोलायमान



चित्र 13.2(a) *कोई गुटका किसी कमानी से संलग्न, जिसका दूसरा सिरा किसी दृढ़ दीवार से संबद्ध है । गुटका घर्षण रहित पृष्ठ पर गति करता है । गुटके की गति को दीवार से दूरी, अथवा विस्थापन* x *के पदों में व्यक्त किया जा सकता है ।*



चित्र 13.2(b) *एक दोलायमान सरल लोलक, इसकी गति को ऊर्ध्वाधर से कोणीय विस्थापन* θ *के पदों में व्यक्त किया जा सकता है ।*

सरल लोलक के लिए, समय के फलन के रूप में ऊर्ध्वाधर से कोण को विस्थापन-चर के रूप में निरूपित किया जा सकता है [देखिए चित्र 13.2(b)]। 'विस्थापन' पद का उल्लेख सदैव स्थिति के संदर्भ में ही नहीं किया जाता। विस्थापन चर कई अन्य प्रकार के भी हो सकते हैं । किसी a.c. परिपथ में संयोजित संधारित्र के सिरों के बीच समय के साथ परिवर्तित हो रही "वोल्टता" को भी एक विस्थापन चर के रूप में लिया जा सकता है । इसी प्रकार, ध्वनि तरंगों के संचरण में समय के साथ 'दाब' में परिवर्तन, प्रकाश तरंगों में परिवर्तित हो रहे वैद्युत तथा चुंबकीय क्षेत्र अन्य संदर्भो में विस्थापन के उदाहरण हैं। विस्थापन चर का मान धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है। दोलनों के प्रयोगों में, भिन्न समयों के लिए विस्थापन चरों की माप ली जाती है ।

विस्थापन को सदैव ही समय के गणितीय फलन द्वारा निरूपित किया जा सकता है । आवर्ती गतियों में यह फलन समय का आवर्ती होता है । आवर्ती फलनों में से एक सरलतम आवर्ती फलन को निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं,

$$f(t) = A\cos\omega t \qquad (13.3a)$$

यदि इस फलन के कोणांक, ωt, में 2π रेडियन या इसके किसी पूर्णांक गुणज की वृद्धि कर दी जाए, तो फलन का मान वही f रहता है । तब भी फलन $f(t)$ आवर्ती ही रहता है जिसका आवर्तकाल, T निम्नलिखित होगा,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (13.3b)$$

अतः कोई फलन $f(t)$ काल T का आवर्ती होता है,

$$f(t) = f(t+T)$$

यदि हम ज्या (sin) फलन, $f(t) = A\sin\omega t$ भी लें तो स्पष्ट रूप से यही परिणाम सही होता है । साथ ही ज्या (sin) एवं कोज्या (cos) फलनों का एक घात संचय, जैसे

$$f(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \qquad (13.3c)$$

भी आवर्ती फलन होता है, जिसका आवर्तकाल T होता है । यदि हम

$$A = D\cos\phi \text{ तथा } B = D\sin\phi$$

लें, तो समीकरण (13.3c) को इस प्रकार लिख सकते हैं

$$f(t) = D\sin(\omega t + \phi), \qquad (13.3d)$$

यहाँ अचर D और ϕ दिए गए हैं

$$D = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ तथा } \phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$

आवर्ती ज्या और कोज्या फलनों का विशेष महत्त्व फ्रांसीसी गणितज्ञ जीन बापटिस्ट जोसेफ फूरिए (1768–1830) द्वारा सिद्ध असाधारण परिणाम के कारण है, जो इस प्रकार है : ***किसी भी आवर्ती फलन को उचित गुणांक वाले विभिन्न आवर्तकाल के ज्या व कोज्या फलनों के अध्यारोपण द्वारा व्यक्त किया जा सकता है ।***

▸ ***उदाहरण 13.2*** निम्नलिखित समय के फलनों में कौन (a) आवर्ती तथा (b) अनावर्ती गति को निरूपित करते हैं ? प्रत्येक आवर्ती गति का आवर्तकाल लिखिए [ω कोई धनात्मक नियतांक है] ।

(i) $\sin\omega t + \cos\omega t$

(ii) $\sin\omega t + \cos 2\omega t + \sin 4\omega t$

(iii) $e^{-\omega t}$

(iv) $\log(\omega t)$

हल (i) $\sin\omega t + \cos\omega t$ एक आवर्ती फलन है। इसे $\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है।

अब, $\sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/4) = \sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/4 + 2\pi)$

$$= \sqrt{2}\sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \frac{\pi}{4}\right]$$

इस फलन का आवर्तकाल $\frac{2\pi}{\omega}$ है ।

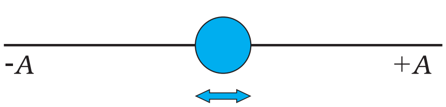
(ii) यह आवर्ती गति का एक उदाहरण है । ध्यान दीजिए, यहाँ प्रत्येक पद एक विभिन्न कोणीय आवृत्ति के आवर्ती फलन को निरूपित करता है । चूँकि आवर्तकाल वह न्यूनतम समय अंतराल होता है जिसके पश्चात् फलन अपने मान की स्वयं पुनरावृत्ति करता है, $\sin\omega t$ का आवर्तकाल $T_0 = 2\pi/\omega$; $\cos 2\omega t$ का आवर्तकाल $\pi/\omega = T_0/2$; तथा $\sin 4\omega t$ का आवर्तकाल $2\pi/4\omega = T_0/4$ होता है । प्रथम पद का आवर्तकाल अंतिम दो पदों के आवर्तकालों का गुणनफल होता है। अतः अंतिम समय का निम्न अंतराल जिसके उपरांत तीनों पदों का योग पुनरावृत्ति करता है T_0 होता है जिसका आवर्त काल $2\pi/\omega$ है।

(iii) फलन $e^{-\omega t}$ अनावर्ती है, यह समय में वृद्धि के साथ एक दिष्टतः घटता है तथा $t \to \infty$ होने पर शून्य की ओर प्रवृत्त होता है और इस प्रकार कभी भी अपने मान की पुनरावृत्ति नहीं करता ।

(iv) फलन $\log(\omega t)$ समय के साथ एकदिष्टतः बढ़ता है । अतः यह अपने मान की कभी भी पुनरावृत्ति नहीं करता और यह एक अनावर्ती फलन है । ध्यान दीजिए, $t \to \infty$ होने पर $\log\omega t$ अपसारित होकर ∞ तक पहुँच जाता है। अतः यह किसी भी प्रकार के भौतिक विस्थापन को निरूपित नहीं कर सकता । ◂

13.3 सरल आवर्त गति

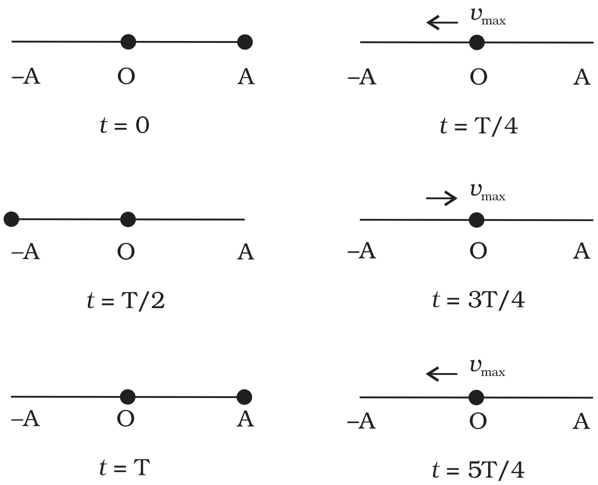
हम चित्र 13.3 के अनुसार x-अक्ष के मूल बिंदु पर $+A$ और $-A$ चरम सीमाओं के मध्य अग्र और पश्च कंपन करने वाले किसी कण पर विचार करें । इस दोलायमान गति को **सरल आवर्त गति** कहते हैं, यदि मूल बिन्दु से कण का विस्थापन x समय के साथ निम्न समीकरण के अनुसार परिवर्तित हो:



चित्र 13.3 x-अक्ष के मूल बिंदु पर $+A$ और $-A$ सीमाओं के भीतर अग्र और पश्च कंपन करते हुए कोई कण ।

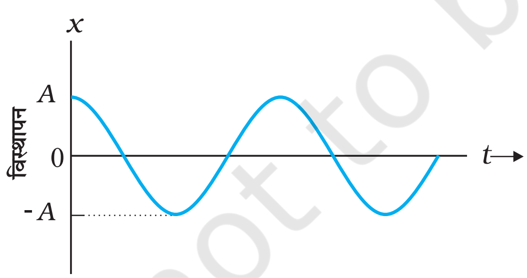
$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad (13.4)$$

यहाँ A, ω तथा ϕ स्थिरांक हैं। अत: प्रत्येक आवर्त गति सरल आवर्त गति (SHM) नहीं है; केवल ऐसी आवर्त गति जिसमें विस्थापन-समय का फलन ज्यावक्रीय है, सरल आवर्त गति होती है। चित्र 13.4 में सरल आवर्त गति करते हुए एक कण की



चित्र 13.4 सरल आवर्त गति करते हुए समय के असतत मान t = 0. T/4, T/2, 3T/4, T, 5T/4 पर कण की स्थिति। वह समय जिसके पश्चात गति की पुनरावृत्ति होती है, T कहलाती है। प्रारंभिक स्थिति (t = 0) आप कुछ भी चुनें, T का मान स्थिर रहेगा। कण की चाल शून्य विस्थापन (x = 0 पर) पर अधिकतम तथा गति की चरम स्थितियों पर शून्य होती है।

समय के असतत् मानों पर स्थिति दर्शायी गई है। प्रत्येक समय अन्तराल $T/4$ है जहाँ T गति का आवर्तकाल है।



चित्र 13.5 सरल आवर्त गति करते हुए कण का विस्थापन समय के सतत फलन के रूप में

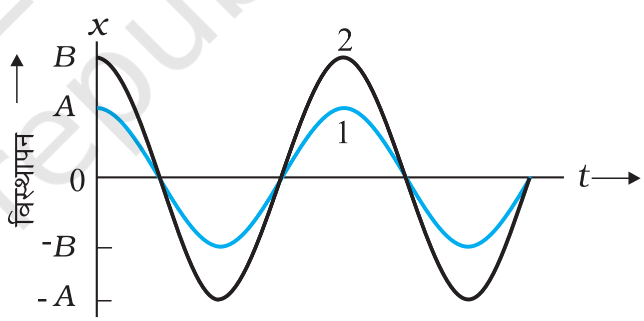
चित्र 13.5 में x के साथ t का ग्राफ आलेखित है जो समय के सतत फलन के रूप में कण के विस्थापन का मान देती है। राशियाँ A, ω तथा ϕ जो दी गई आवर्त गति की विशेषता बताती

$x(t)$	:	विस्थापन x, समय t के फलन के रूप में
A	:	आयाम
ω	:	कोणीय आवृत्ति
$\omega t + \phi$	:	कला (समय पर आश्रित)
ϕ	:	कला स्थिरांक

चित्र 13.6 समीकरण (13.4) में दिए मानक संकेतों का अर्थ

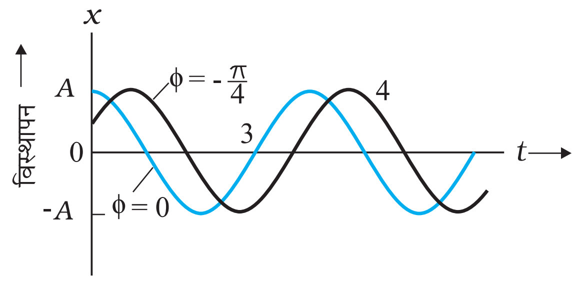
हैं, के मानक नाम हैं, जैसा कि चित्र 13.6 में संक्षिप्त किया गया है। आइए, इन राशियों को हम समझें।

SHM का आयाम A, कण के अधिकतम विस्थापन का परिमाण होता है। [ध्यान दें, व्यापकीकृकता के बिना किसी नुकसान के, A को धनात्मक लिया जा सकता है]। चूंकि समय का कोज्या फलन +1 से –1 के बीच विचरण करता है, इसलिए विस्थापन चरम स्थिति $+A$ से $-A$ के बीच विचरण करेगा। दो सरल आवर्त गतियों के ω तथा ϕ समान, लेकिन आयाम अलग हो सकते हैं, जैसा कि चित्र 13.7(a) में दिखाया गया है।



चित्र 13.7 (a) समीकरण (13.4) से प्राप्त ϕ = 0 पर समय के फलन के रूप में विस्थापन का आलेख । वक्र 1 और 2 दो भिन्न आयामों A तथा A के लिए हैं ।

जब किसी दिए गए आवर्त गति का आयाम A नियत है, किसी समय t पर कण की गति की आवस्था को कोज्या फलन के कोणांक $(\omega t + \phi)$ के द्वारा दर्शाया जाता है। समय पर आश्रित रहने वाली इस राशि $(\omega t + \phi)$ को गति की कला कहते हैं। $t = 0$ पर कला का परिमाण ϕ होता है जिसे कला नियतांक (अथवा कला-कोण) कहते हैं। यदि आयाम ज्ञात हो तो $t = 0$ पर के विस्थापन मान से ϕ ज्ञात किया जा सकता है। दो सरल आवर्त गतियों के A तथा ω समान लेकिन कला-कोण ϕ विभिन्न हो सकते हैं, जैसा कि चित्र 13.7 (b) में दर्शाया गया है।



चित्र 13.7(b) समीकरण (13.4) से प्राप्त (x-t) आलेख । वक्र 3 तथा 4 क्रमशः कला कोण ϕ = 0 rad तथा $\phi = -\pi/4$ rad के लिए हैं। दोनों आलेखों के लिए आयाम A समान है।

अंततः राशि ω को गति के आवर्तकाल T से संबंधित देखा जा सकता है। सरलता के लिए समीकरण (13.4) में ϕ = 0 rad लेने पर हमें प्राप्त होता है–

$$x(t) = A\cos \omega t \qquad (13.5)$$

चूंकि गति का आवर्तकाल T है, $x(t)$ का मान $x(t+T)$ के समान होगा। अर्थात्,

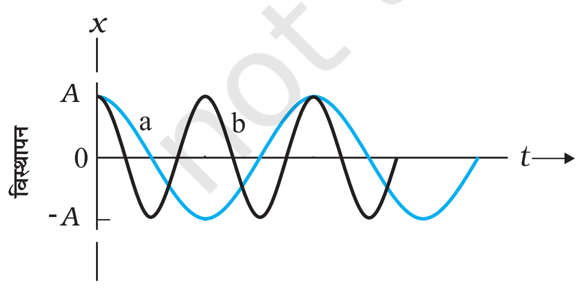
$$A\cos \omega t = A\cos \omega(t+T) \qquad (13.6)$$

अब चूँकि 2π आवर्त काल वाला कोज्या फलन आवर्ती है, अर्थात् जब कोणांक 2π रेडियन से परिवर्तित होता है, यह प्रथम बार स्वयं की पुनरावृत्ति करता है। अतः

$$\omega(t+T) = \omega t + 2\pi$$

अर्थात् $\omega = 2\pi/T$ (13.7)

ω को SHM की कोणीय आवृत्ति कहते हैं। इसका S.I. मात्रक रेडियन प्रति सेकेंड है। चूंकि दोलन की आवृत्ति मात्र $1/T$ है, ω दोलन की आवृत्ति का 2π गुणा होता है। दो सरल आवर्त गति के A तथा ϕ समान, किन्तु ω विभिन्न हो सकते हैं, जैसा कि चित्र 13.8 में देखा जा सकता है। इस आलेख में वक्र b का आवर्त काल वक्र a के आवर्त काल का आधा है जबकि इसकी आवृत्ति वक्र a की आवृत्ति की दुगुनी है।



चित्र 13.8 समीकरण (14.4) के ϕ = 0 rad पर दो भिन्न आवर्तकालों के लिए आलेख।

▸ **उदाहरण 13.3** समय के निम्नलिखित फलनों में से कौन (a) सरल आवर्त गति तथा (b) आवर्ती गति को निरूपित करता है परंतु सरल आवर्त गति नहीं ? प्रत्येक का आवर्तकाल निकालिए ।

(a) $\sin \omega t - \cos \omega t$

(b) $\sin^2 \omega t$

हल (a) $\sin \omega t - \cos \omega t$

$= \sin \omega t - \sin(\pi/2 - \omega t)$

$= 2\cos(\pi/4)\sin(\omega t - \pi/4)$

$= \sqrt{2}\sin(\omega t - \pi/4)$

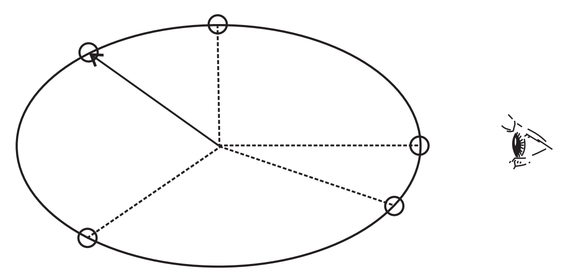
यह फलन सरल आवर्त गति का निरूपण करता है, जिसका आवर्तकाल $T = 2\pi/\omega$ तथा कला-कोण $(-\pi/4)$ rad अथवा $(7\pi/4)$ rad है ।

(b) $\sin^2 \omega t = ½ - ½\cos 2\omega t$

यह फलन आवर्ती है, जिसका आवर्तकाल $T=\pi/\omega$ है । ये संतुलन बिंदु शून्य के बदले ½ पर सरल आवर्त गति को भी दर्शाता है। ◂

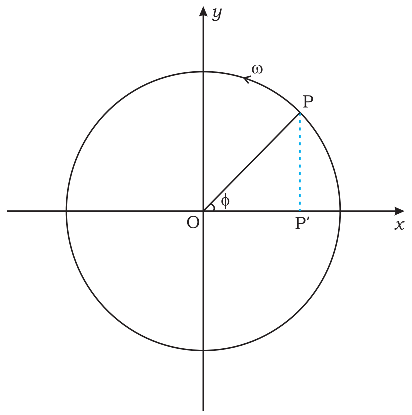
13.4 सरल आवर्त गति तथा एकसमान वर्तुल गति

इस अनुभाग में हम देखेंगे कि वृत्त के व्यास पर एकसमान वर्तुल गति का प्रक्षेप सरल आवर्त गति करता है। एक सरल प्रयोग (चित्र 13.9) इस संबंध की सजीव कल्पना करने में हमारी मदद करता है। एक गेंद को किसी डोरी के सिरे से बाँधकर क्षैतिज तल में उसे किसी निश्चित बिंदु के परितः अचर कोणीय चाल से गति कराइये। तब गेंद क्षैतिज तल में एकसमान वर्तुल गति करेगी। अपनी आंख को गति के तल पर केन्द्रित रखते हुए तिरछी ओर से अथवा सामने से गेंद का अवलोकन कीजिए। घूर्णन बिन्दु को यदि हम मध्य बिन्दु मानें तो यह गेंद एक क्षैतिज तल के अनुदिश इधर-उधर गति करती हुई प्रतीत होगी। विकल्पतः आप गेंद की परछाईं वृत्त के तल के लंबवत् किसी दीवार पर भी देख सकते हैं। इस प्रक्रिया में हम जो कुछ अवलोकन करते हैं, वास्तव में वह हमारी दृष्टि की दिशा के अभिलंबवत् व्यास पर बॉल की गति होती है।



चित्र 13.9 किनारे से देखे गए एक समतल में बॉल की वृत्तीय गति सरल आवर्त गति है।

चित्र 13.10 इसी स्थिति को गणितीय रूप में वर्णन करता है। मान लीजिए कोई कण P, त्रिज्या A के एक वृत्त पर कोणीय चाल ω से एकसमानीय गति कर रहा है। घूमने की दिशा वामावर्त है। कण की प्रारंभिक 'स्थिति सदिश' अर्थात् $t = 0$ पर सदिश **OP** , धनात्मक x अक्ष के साथ कोण ϕ बनाता है।



चित्र 13.10

t समय के बाद यह अगला कोण ωt पूरा करता है और इसकी 'स्थिति सदिश' +ve x-अक्ष के साथ एक कोण $\omega t+\phi$ बनाती है। अब x-अक्ष पर 'स्थिति सदिश' OP के प्रक्षेप पर विचार करें। यह OP′ होगा। जब कण P वृत्त पर गति करता है तो x-अक्ष पर P′ की स्थिति प्रदत्त की जाती है

$$x(t) = A \cos (\omega t + \phi)$$

जो कि SHM का पारिभाषिक समीकरण है। यह दर्शाता है कि यदि P किसी वृत्त पर एकसमानीय गति करता है तो इसका प्रक्षेप P′ वृत्त के व्यास पर सरल आवर्त गति करता है। कण P तथा वह वृत्त जिसपर यह गति करता है उसे क्रमशः संदर्भ कण तथा संदर्भ वृत्त कहते हैं।

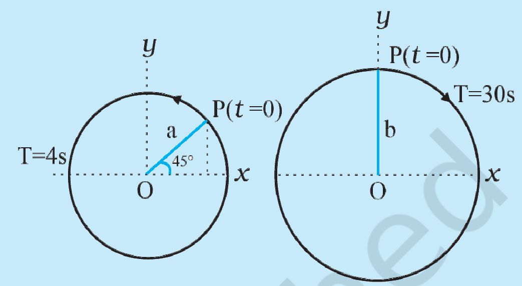
P की गति के प्रक्षेप को हम किसी भी व्यास, जैसे कि y-अक्ष पर ले सकते हैं। इस स्थिति में y-अक्ष पर P′ का विस्थापन $y(t)$ होगा।

$$y(t) = A \sin (\omega t + \phi)$$

यह भी एक SHM है जिसका आयाम x-अक्ष पर प्रक्षेप के समान ही है, लेकिन इसकी कला $\pi/2$ से भिन्न है।

वर्तुल गति तथा SHM के बीच इस संबंध के बावजूद रैखिक सरल आवर्ती गति में किसी कण पर लगता हुआ बल किसी कण को एकसमान वर्तुल गति में रखने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल से काफी अलग है।

▶ ***उदाहरण 13.4*** नीचे दिये चित्र में दो वर्तुल गतियाँ दर्शायी गई हैं । इन चित्रों पर वृत्त की त्रिज्या, घूर्णन का आवर्तकाल, आरंभिक स्थिति तथा घूर्णन की दिशा अंकित की गई है । प्रत्येक स्थिति में घूर्णी कण P के त्रिज्या सदिश के x-प्रक्षेप की सरल आवर्त गति प्राप्त कीजिए ।



हल

(a) $t = 0$ पर, OP x-अक्ष (की धनात्मक दिशा) से 45° $= \pi/4$ rad का कोण बनाता है । t समय पश्चात् यह वामावर्त दिशा में $\dfrac{2\pi}{T}t$ rad कोण पूरा करता है, तथा x-अक्ष से $\left(\dfrac{2\pi}{T}t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ rad कोण बनाता है । समय t पर x-अक्ष पर OP के प्रक्षेप इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$x(t) = A \cos \left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$T = 4$ s के लिए

$$x(t) = A \cos \left(\frac{2\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

जो कि A आयाम, 4 s आवर्तकाल तथा प्रारंभिक कला* $\dfrac{\pi}{4}$ की सरल आवर्त गति है ।

(b) इस स्थिति में $t = 0$ पर, OP x-अक्ष से $90° = \pi/2$ का कोण बनाता है । यह दक्षिणावर्त दिशा में $\dfrac{2\pi}{T}t$ कोण

* कोण की प्राकृतिक इकाई रेडियन है जिसे त्रिज्या की चाप के अनुपात द्वारा परिभाषित करते हैं। कोण अदिश राशि है। जब हम π को उसके बहुगुण या अपवर्तक लिखते हैं तो रेडियन इकाई का उल्लेख करना आवश्यक नहीं है। रेडियन और डिग्री के बीच रूपांतरण, मीटर, सेंटीमीटर या मील के बीच रूपांतरण के समरूप नहीं है। यदि किसी त्रिकोणमितीय फलन के कोणांक में इकाई नहीं दिया है तो मानना चाहिए कि इकाई रेडियन है। यदि कोण की इकाई डिग्री है तो उसको स्पष्टतः दर्शाना होगा। उदाहरण के लिए $\sin(15^0)$ का अर्थ है 15 डिग्री का sin। परन्तु sin (15) का तात्पर्य 15 रेडियन का sin है। आगे से 'rad' इकाई नहीं दर्शाया जाएगा। जब भी कोण का अंकिक मान बिना इकाई के दिया हुआ है तो इकाई वास्तव में रेडियन है।

पूरा करता है, तथा x-अक्ष से $\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{T}t\right)$ कोण बनाता है । समय t पर x-अक्ष पर OP प्रक्षेप को इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$x(t) = B\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$= B\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$T = 30$ s के लिए,

$$x(t) = B\sin\left(\frac{\pi}{15}t\right)$$

इसे इस प्रकार $x(t) = B\cos\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)$ लिखकर इसकी समीकरण (13.4) से तुलना करने पर हमें यह ज्ञात होता है कि यह B आयाम, 30 s आवर्तकाल तथा प्रारंभिक कला $-\frac{\pi}{2}$ rad की सरल आवर्त गति को निरूपित करता है । ◀

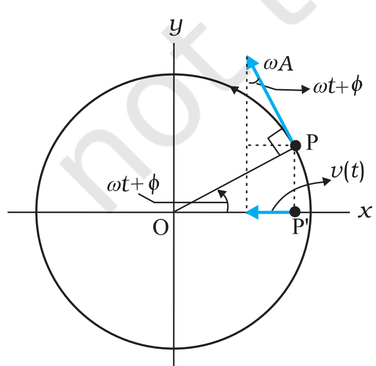
13.5 सरल आवर्त गति में वेग तथा त्वरण

एकसमानीय वर्तुल गति करते हुए किसी कण की चाल इसकी कोणीय चाल गुणा वृत्त की त्रिज्या A के बराबर होती है।

$$v = \omega A \tag{13.8}$$

किसी समय t पर, वेग $\mathbf{v}$ की दिशा वृत्त के उस बिन्दु पर स्पर्शज्या के अनुदिश होती है जहाँ कण उस क्षण पर अवस्थित रहता है। चित्र 13.11 की ज्यामिति से यह स्पष्ट है कि समय t पर प्रक्षेप कण P′ का वेग है

$$v(t) = -\omega A\sin(\omega t+\phi) \tag{13.9}$$



चित्र 13.11 कण P′ का वेग $v(t)$ संदर्भ कण P के वेग $\mathbf{v}$ का प्रक्षेप है ।

यहाँ ऋणात्मक चिह्न यह दर्शाता है कि $v(t)$ की दिशा x-अक्ष की धनात्मक दिशा के विपरीत है। समीकरण (13.9), सरल आवर्त गति करते हुए कण की तात्क्षणिक वेग प्रदत्त करता है, जहाँ विस्थापन समीकरण (13.4) से प्राप्त होता है। निस्संदेह इस समीकरण को हम बिना ज्यामितीय कोणांक के भी प्राप्त कर सकते हैं। इसके लिए सीधे समीकरण (13.4) को t के सापेक्ष अवकलित करते हैं :

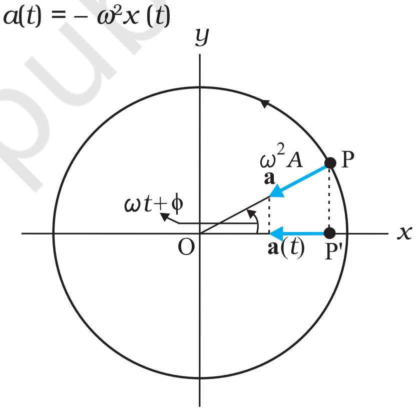
$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) \tag{13.10}$$

सरल आवर्त गति करते हुए कण के तात्क्षणिक त्वरण को प्राप्त करने के लिए संदर्भ वृत्त की विधि को इसी प्रकार प्रयोग में लाया जा सकता है।

हमें ज्ञात है कि एकसमानीय वर्तुल गति में कण के अभिकेन्द्रीय त्वरण का परिमाण v^2/A अथवा $\omega^2 A$ है तथा यह केन्द्र की ओर निर्दिष्ट है, अर्थात इसकी दिशा PO की ओर है। प्रक्षेप कण P′ का तात्क्षणिक त्वरण तब होगा (चित्र 13.12 देखें)

$$a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t+\phi)$$

$$a(t) = -\omega^2 x(t) \tag{13.11}$$



*चित्र 13.12 बिंदु P′ का त्वरण $a(t)$, संदर्भ बिंदु P के त्वरण **a** का प्रक्षेप होता है ।*

समीकरण (13.11) सरल आवर्त गति करते हुए कण का त्वरण व्यक्त करता है। इसी समीकरण को, समीकरण (13.9) से प्रदत्त वेग $v(t)$ को समय के सापेक्ष अवकलित करके सीधे प्राप्त किया जा सकता है:

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) \tag{13.12}$$

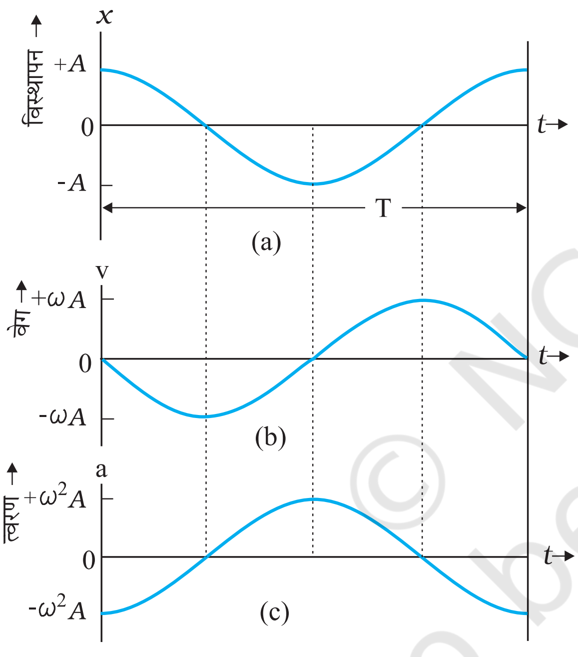
समीकरण (13.11) से हम एक महत्त्वपूर्ण परिणाम पर ध्यान देते हैं कि सरल आवर्त गति में कण का त्वरण इसके विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है। $x(t) > 0$ के लिए $a(t) < 0$ तथा $x(t) < 0$ के लिए $a(t) > 0$ होता है। अतः $-A$ तथा A के

बीच x का मान कुछ भी हो, त्वरण a(t) हमेशा केन्द्र की ओर निर्दिष्ट रहता है।

सरलता के लिए हम $\phi = 0$ रख कर $x(t)$, $v(t)$ और $a(t)$ के व्यंजक को लिखते हैं

$x(t)=A\cos\omega t$, $v(t)=-\omega A\sin\omega t$, $a(t)=-\omega^2 A\cos\omega t$

संगत आलेख को चित्र 13.13 में दर्शाया गया है। सभी राशियाँ समय के साथ ज्यावक्रीय विचरण करती हैं; केवल उनकी उच्चिष्ठ (maxima) में अन्तर होता है तथा उनके आलेखों में कलाओं की भिन्नता होती है। x, $-A$ तथा A के मध्य विचरण करता है; $v(t)$, $-\omega A$ तथा ωA के मध्य विचरण करता है एवं $a(t)$, $-\omega^2 A$ तथा $\omega^2 A$ के मध्य विचरण करता है। विस्थापन आलेख के सापेक्ष, वेग आलेख की कला में $\pi/2$ का अंतर है तथा त्वरण आलेख की कला में π का अंतर है।



चित्र 13.13 सरल आवर्त गति में किसी कण का विस्थापन, वेग तथा त्वरण का आवर्तकाल T समान होता है, लेकिन उनकी कलाओं में भिन्नता होती है।

उदाहरण 13.5 : कोई पिंड निम्नलिखित समीकरण के अनुसार सरल आवर्त गति से दोलन करता है,

$x = (5.0 \text{ m}) \cos [(2\pi \text{ rad/s})\, t + \pi/4]$

$t = 1.5$ s पर, पिंड का (a) विस्थापन, (b) वेग तथा (c) त्वरण परिकलित कीजिए ।

हल पिंड की कोणीय आवृत्ति $\omega = 2\pi \text{ s}^{-1}$ तथा इसका आवर्तकाल $T = 1$ s

$t = 1.5$ s पर,

(a) विस्थापन $= (5.0 \text{ m}) \cos [(2\pi \text{ s}^{-1}) \times 1.5 \text{ s} + \frac{\pi}{4}]$

$= (5.0 \text{ m}) \cos [(3\pi + \frac{\pi}{4})]$

$= -5.0 \times 0.707 \text{ m}$

$= -3.535 \text{ m}$

(b) समीकरण (13.9) का उपयोग करने पर पिंड का वेग

$= -(5.0 \text{ m})(2\pi \text{ s}^{-1}) \sin [(2\pi \text{ s}^{-1}) \times (1.5 \text{ s} + \frac{\pi}{4})]$

$= -(5.0 \text{ m})(2\pi \text{ s}^{-1}) \sin [(3\pi + \frac{\pi}{4})]$

$= 10\pi \times 0.707 \text{ m s}^{-1}$

$= 22 \text{ m s}^{-1}$

(c) समीकरण (13.10) का उपयोग करने पर पिंड का त्वरण

$= -(2\pi \text{ s}^{-1})^2 \times$ विस्थापन

$= -(2\pi \text{ s}^{-1})^2 \times (-3.535 \text{ m})$

$= 130 \text{ m s}^{-2}$

13.6 सरल आवर्त गति के लिए बल का नियम

न्यूटन की गति के दूसरे नियम तथा आवर्त गति करते किसी कण के लिए त्वरण के व्यंजक (समीकरण 13.11) प्रयोग करने पर

$$F(t) = ma$$

$$= -m\omega^2 x(t)$$

अथवा, $F(t) = -k\,x(t)$ (13.13)

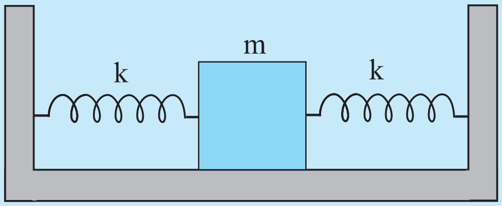
यहाँ $k = m\omega^2$ (13.14a)

अथवा, $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (13.14b)

त्वरण की तरह, बल हमेशा माध्य स्थिति की ओर निर्दिष्ट रहता है – इसलिए यह सरल आवर्त गति में प्रत्यानयन बल कहलाता है। अब तक की गई चर्चाओं को संक्षिप्त करने पर हम पाते हैं कि सरल आवर्त गति को दो प्रकार से परिभाषित किया जा सकता है, या तो विस्थापन के लिए समीकरण (13.4) द्वारा अथवा समीकरण (13.13) द्वारा जो कि बल के नियम प्रदान करता है। समीकरण (13.4) से समीकरण (13.13) प्राप्त करने के लिए हमें इसे दो बार अवकलित करना पड़ा। इसी प्रकार बल के नियम, समीकरण (13.13) को दो बार समाकलित करने पर हमें वापस समीकरण (13.4) प्राप्त हो सकता है।

ध्यान दीजिए कि समीकरण (13.13) में बल $x(t)$ के रैखिकीय समानुपाती है। अत: इस तरह के बल के प्रभाव से दोलन करते हुए किसी कण को रैखिक आवर्ती दोलक कहते हैं। वास्तव में, बल के व्यंजक में x^2, x^3 आदि के समानुपाती कुछ पद हो सकते हैं। अत: इन्हें अरैखिक दोलक कहते हैं।

▸ **उदाहरण 13.6** कमानी स्थिरांक k की दो सर्वसम कमानियाँ M संहति के किसी गुटके तथा स्थिर आधारों से चित्र 13.14 में दर्शाए गए अनुसार जुड़ी हुई हैं।



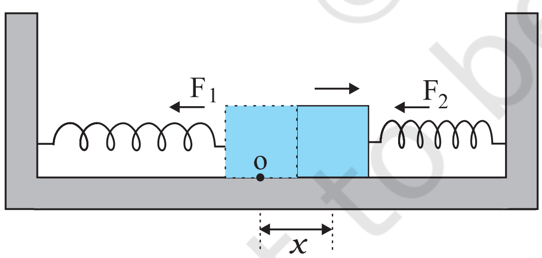
चित्र 13.14

यह दर्शाइए कि जब गुटके को अपनी साम्यावस्था की स्थिति से किसी ओर विस्थापित किया जाता है, तब यह सरल आवर्त गति करता है। दोलन का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए गुटके को अपनी साम्यावस्था की स्थिति से दाईं ओर x दूरी तक विस्थापित किया जाता है। इसे चित्र 13.15 में दिखाया गया है। इस स्थिति में बाईं ओर की कमानी x लंबाई द्वारा दीर्घित हो जाती है तथा दाईं ओर की कमानी भी उतनी ही लंबाई द्वारा संपीडित हो जाती है। तब गुटके पर कार्यरत बल

$F_1 = -k\,x$ (कमानी द्वारा बाईं ओर आरोपित बल, जो गुटके को माध्य स्थिति की ओर खींचने का प्रयास करता है।)

$F_2 = -k\,x$ (कमानी द्वारा दाईं ओर आरोपित बल, जो गुटके को माध्य स्थिति की ओर धकेलने का प्रयास करता है।)



चित्र 13.15

तब गुटके पर आरोपित नेट बल,

$$F = -2\,kx$$

अतः, गुटके पर आरोपित बल विस्थापन के अनुक्रमानुपाती तथा माध्य-स्थिति की ओर निर्दिष्ट होता है; इसलिए, गुटके की गति सरल आवर्त गति है। इसमें दोलन का आवर्तकाल,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$ है। ◂

13.7 सरल आवर्त गति में ऊर्जा

सरल आवर्त गति करते हुए कण की स्थितिज तथा गतिज ऊर्जाएँ दोनों शून्य तथा अपने अधिकतम परिमाण के बीच विचरण करती हैं।

अनुभाग 13.5 में हमने देखा है कि सरल आवर्त गति करते किसी कण का वेग समय का आवर्ती फलन होता है। विस्थापन की चरम स्थितियों में यह शून्य होता है। अतः ऐसे कण की गतिज ऊर्जा (K), जिसे हम इस प्रकार परिभाषित करते हैं,

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}m\,\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2}k\,A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \qquad (13.15)$$

भी समय का आवर्ती फलन होती है जिसका परिमाण विस्थापन अधिकतम होने पर शून्य तथा कण के माध्य स्थिति पर होने पर अधिकतम होता है। ध्यान दीजिए, चूँकि गतिज ऊर्जा K में, v के चिह्न का कोई अर्थ नहीं होता, अतः K का आवर्तकाल $T/2$ है।

सरल आवर्त गति करने वाले किसी कण की स्थितिज ऊर्जा कितनी होती है? अध्याय 5 में हमने देखा है कि स्थितिज ऊर्जा की संकल्पना केवल संरक्षी बलों के लिए ही होती है। कमानी बल $F = -kx$ एक संरक्षी बल है जिससे स्थितिज ऊर्जा संयुक्त होती है।

$$U = \frac{1}{2}k\,x^2 \qquad (13.16)$$

अतः सरल आवर्त गति करते किसी कण की स्थितिज ऊर्जा,

$$U(x) = \frac{1}{2}k\,x^2$$

$$= \frac{1}{2}k\,A^2 \cos^2(\omega t + \phi) \qquad (13.17)$$

इस प्रकार, सरल आवर्त गति करते किसी कण की स्थितिज ऊर्जा भी आवर्ती होती है जिसका आवर्तकाल $T/2$ होता है, यह ऊर्जा माध्य स्थिति में शून्य तथा चरम विस्थापनों पर अधिकतम होती है। अतः समीकरणों (13.15) तथा (13.17) से हमें निकाय की कुल ऊर्जा E, प्राप्त होती है,

$$E = U + K$$

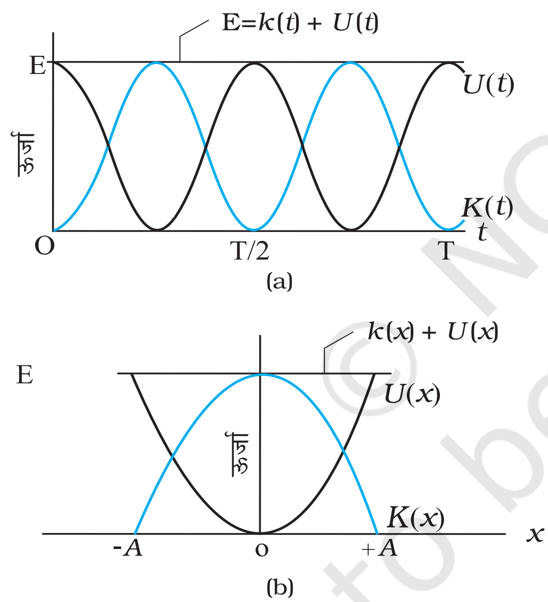
$$= \frac{1}{2} k\,A^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} k\,A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2} k\,A^2 \left[\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)\right]$$

त्रिकोणमिती की सामान्य तादात्मक को प्रयोग करने पर कोष्ठक में दी गई राशि का मान एक प्राप्त होता है। अत:

$$E = \frac{1}{2} k\,A^2 \qquad (13.18)$$

जैसा कि संरक्षी बलों के अधीन गतियों के लिए आशा की जाती है किसी भी सरल आवर्ती दोलक की कुल यांत्रिक ऊर्जा कालाश्रित नहीं होती । किसी रैखिक सरल आवर्ती दोलक की गतिज तथा स्थितिज ऊर्जाओं की समय और विस्थापन पर निर्भरता चित्र 13.16 में दर्शायी गई है ।



चित्र 13.16 गतिज ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा तथा कुल ऊर्जा समय के फलन के रूप में [(a) में दर्शित] तथा सरल आवर्त गति करते हुए कण का विस्थापन [(b) में दर्शित]। गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा दोनों आवर्तकाल $T/2$ के पश्चात पुनरावृत्ति करते हैं। t तथा x के सभी मानों के लिए कुल ऊर्जा नियत रहती है।

ध्यान दीजिए कि सरल आवर्त गति में स्थितिज तथा गतिज दोनों ऊर्जाएँ चित्र 13.16 में हमेशा धनात्मक मानी गई हैं। निस्सन्देह गतिज ऊर्जा कभी ऋणात्मक नहीं हो सकती, क्योंकि यह चाल के वर्ग के समानुपाती होती है। स्थितिज ऊर्जा के समीकरण में गुप्त नियतांक के चयन के कारण स्थितिज ऊर्जा धनात्मक होती है। गतिज तथा स्थितिज दोनों ऊर्जाएँ SHM के प्रत्येक आवर्तकाल में दो बार अपनी चरम स्थिति को प्राप्त करती हैं। $x = 0$ के लिए, ऊर्जा गतिज है; चरम स्थिति $x = \pm A$ पर यह पूरे तौर पर स्थितिज ऊर्जा है। इन सीमाओं के बीच गति करते हुए, स्थितिज ऊर्जा के घटने से गतिज ऊर्जा बढ़ती है तथा गतिज ऊर्जा के घटने से स्थितिज ऊर्जा बढ़ती है।

▶ ***उदाहरण 13.7*** 1kg संहति के किसी गुटके को एक कमानी से बाँधा गया है । कमानी का कमानी स्थिरांक $50\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ है । गुटके को उसकी साम्यावस्था की स्थिति $x = 0$ से $t = 0$ पर किसी घर्षणहीन पृष्ठ पर कुछ दूरी x = 10 cm तक खींचा जाता है । जब गुटका अपनी माध्य-स्थिति से 5 cm दूर है, तब उसकी गतिज, स्थितिज तथा कुल ऊर्जाएँ परिकलित कीजिए ।

हल

गुटका सरल आवर्त गति करता है । समीकरण [13.14(b)] से इसकी कोणीय आवृत्ति

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

$$= \sqrt{\frac{50\ \mathrm{N\ m^{-1}}}{1\ \mathrm{kg}}}$$

$= 7.07\ \mathrm{rad\ s^{-1}}$ होगी,

तब किसी समय t पर इसका विस्थापन

$x(t) = 0.1\cos(7.07t)$ होगा ।

अत:, जब कण अपनी माध्य स्थिति से 5 cm दूर है, तब

$0.05 = 0.1\cos(7.07t)$

अथवा $\cos(7.07t) = 0.5$,

अत:, $\sin(7.07t) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$

तब गुटके का $x = 5$ cm पर वेग $= 0.1 \times 7.07 \times 0.866\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

$= 0.61\,\mathrm{m\ s^{-1}}$

अत:, गुटके की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2} m v^2$

$$= \frac{1}{2}\left[1\,kg \times (0.6123\,\mathrm{m s^{-1}})^2\right]$$

$= 0.19$ J

तथा गुटके की स्थितिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}kx^2$

$$= \frac{1}{2}\left(50\ \mathrm{N\ m^{-1}} \times 0.05 \times 0.05\ \mathrm{m}\right)$$

$$= 0.0625\ \mathrm{J}$$

$\therefore\ x = 5\ \mathrm{cm}$ पर गुटके की कुल ऊर्जा

$$= (0.19 + 0.0625)\ \mathrm{J}$$

$$= 0.25\ \mathrm{J}$$

हम यह भी जानते हैं कि अधिकतम विस्थापन पर, गतिज ऊर्जा शून्य होती है, अत: निकाय की कुल ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा के बराबर होती है। अत: निकाय की कुल ऊर्जा,

$$= \frac{1}{2}(50\ \mathrm{N\ m^{-1}} \times 0.1\ \mathrm{m} \times 0.1\ \mathrm{m})$$

$$= 0.25\ \mathrm{J}$$

यह ऊर्जा 5 cm विस्थापन पर दोनों ऊर्जाओं के योग के बराबर ही है। यह ऊर्जा संरक्षण सिद्धांत के अनुकूल है। ◀

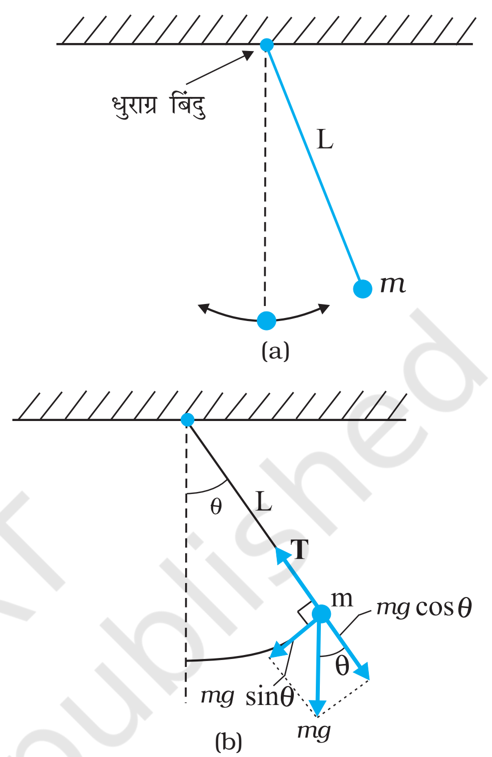
13.8 सरल आवर्त गति निष्पादित करने वाले कुछ निकाय

निरपेक्षत: शुद्ध सरल आवर्त गति के कोई भौतिक उदाहरण नहीं हैं। अपने व्यावहारिक जीवन में हम ऐसे निकाय देखते हैं जो किन्हीं निश्चित परिस्थितियों में लगभग सरल आवर्त गति करते हैं। इस अनुभाग में इसके पश्चात् हम ऐसे ही कुछ निकायों की गतियों की चर्चा करेंगे।

13.8.1 सरल लोलक

यह कहा जाता है कि गैलीलियो ने किसी चर्च में एक दोलायमान झाड़फानूस का आवर्तकाल अपनी नाड़ी की स्पंद गति द्वारा मापा था। उसने यह निष्कर्ष निकाला कि झाड़फानूस की गति आवर्ती है। यह निकाय लोलक का ही एक प्रकार होता है। लगभग 1 मीटर लंबे न खिंचने वाले धागे को लेकर उसके एक सिरे से पत्थर का टुकड़ा बाँधकर आप भी अपना एक लोलक बना सकते हैं। अपने लोलक को किसी उचित टेक से बाँधकर इस प्रकार लटकाइए कि वह स्वतंत्रतापूर्वक दोलन कर सके। पत्थर के टुकड़े को कम दूरी तक विस्थापित करके छोड़ दीजिए। पत्थर इधर-उधर गति करने लगता है। पत्थर की यह गति आवर्ती होती है जिसका आवर्तकाल लगभग 2 सेकंड होता है।

हम यह स्थापित करेंगे कि मध्यमान स्थिति से लघु विस्थापनों के लिए इस लोलक की आवर्त गति सरल आवर्त गति होती है। किसी ऐसे सरल लोलक पर विचार कीजिए जिसमें m द्रव्यमान का कोई लघु आमाप का गोलक L लम्बाई के द्रव्यमानहीन तथा न खिंचने योग्य डोरी के एक सिरे से बंधा हो। डोरी का दूसरा सिरा किसी दृढ़ टेक से जुड़ा है। गोलक इस ऊर्ध्वाधर दृढ़ टेक से होकर जाने वाली रेखा के अनुदिश तल में दोलन करता है। यह व्यवस्था चित्र 13.17(a) द्वारा दर्शाई गई है। चित्र 13.17(b) में दोलक पर कार्यरत बल प्रदर्शित किए गए हैं जो एक प्रकार का बल-निर्देशक आरेख है।



चित्र 13.17 *(a) माध्य स्थिति के सापेक्ष दोलन करता कोई सरल लोलक, (b) त्रिज्य बल $T - mg\cos\theta$ अभिकेन्द्र बल प्रदान करता है परंतु धुराग्र के सापेक्ष इसका कोई बल-आघूर्ण नहीं होता। स्पर्श रेखीय बल $mg\sin\theta$ प्रत्यानयन बल प्रदान करता है।*

माना कि डोरी ऊर्ध्वाधर से θ कोण बनाती है। जब गोलक माध्य स्थिति में होता है तो $\theta = 0$

गोलक पर केवल दो बल कार्यरत हैं : डोरी की लंबाई के अनुदिश तनाव T तथा गुरुत्व के कारण ऊर्ध्वाधर बल ($=mg$)। हम बल mg का वियोजन डोरी के अनुदिश घटक $mg\cos\theta$ तथा उसके लंबवत् $mg\sin\theta$ के रूप में कर सकते हैं। चूँकि गोलक की गति L त्रिज्या के किसी वृत्त के अनुदिश है जिसका केन्द्र धुराग्र बिन्दु पर स्थित है, अत: गोलक का कोई त्रिज्य त्वरण ($\omega^2 L$) तथा साथ ही स्पर्शरेखीय त्वरण होगा। स्पर्शरेखीय त्वरण का कारण वृत्त के चाप के अनुरूप गति का एकसमान न होना है। त्रिज्य त्वरण नेट त्रिज्य बल $T - mg\cos\theta$ के कारण होता है जबकि स्पर्शरेखीय त्वरण $mg\sin\theta$ के कारण उत्पन्न होता है। धुराग्र के सापेक्ष बल आघूर्ण पर विचार करना अधिक सुविधाजनक होता है क्योंकि तब त्रिज्य बल का आघूर्ण शून्य हो जाता है। इस प्रकार आधार के सापेक्ष बल आघूर्ण τ बल के स्पर्शरेखीय घटक द्वारा ही पूर्णतया प्राप्त होता है।

$$\tau = -L\,(mg\sin\theta) \tag{13.19}$$

यह एक प्रत्यानयन बल आघूर्ण है जो विस्थापन के परिणाम को कम करने का प्रयास करता है; इसी कारण इसे ऋणात्मक चिह्न द्वारा व्यक्त किया गया है। घूर्णी गति के लिए न्यूटन के नियम के अनुसार

$$\tau = I\,\alpha \tag{13.20}$$

यहाँ I धुराग्र बिंदु के परितः लोलक का घूर्णी जड़त्व है तथा α उसी बिंदु के परितः कोणीय त्वरण है । इस प्रकार

$$I\alpha = -mgL\sin\theta \tag{13.21}$$

अथवा $$\alpha = -\frac{mgL\sin\theta}{I} \tag{13.22}$$

यदि हम यह मानें कि विस्थापन θ छोटा है, तो समीकरण (13.22) को सरल बना सकते हैं । हम जानते हैं कि $\sin\theta$ को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है,

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\ldots \tag{13.23}$$

यहाँ θ रेडियन में है।

अब यदि θ छोटा है, तो $\sin\theta$ का सन्निकटन θ द्वारा किया जा सकता है । ऐसी परिस्थिति के समीकरण (13.22) को इस प्रकार भी लिख सकते हैं,

$$\alpha = -\frac{mgL}{I}\theta \tag{13.24}$$

सारणी 13.1 में हमने कोण θ को अंशों में, इसके तुल्यांक रेडियनों में, तथा फलन $\sin\theta$ के मान सूचीबद्ध किए हैं । सारणी से यह देखा जा सकता है कि θ के 20 अंश तक बड़े मानों के लिए $\sin\theta$ के मान लगभग वही होते हैं जैसे θ को **रेडियनों में व्यक्त** करने पर मिलते हैं

सारणी 13.1 $\sin\theta$ कोण θ के फलन के रूप में

θ (अंशों में)	θ (रेडियनों में)	$\sin\theta$
0	0	0
5	0.087	0.087
10	0.174	0.174
15	0.262	0.259
20	0.349	0.342

गणितीय रूप में समीकरण (13.24) समीकरण (13.11) के तुल्य है, अंतर केवल यह है कि यहाँ चर राशि कोणीय त्वरण है। अतः हमने यह सिद्ध कर दिया है कि θ के लघु मानों के लिए गोलक की गति सरल आवर्त गति है।

समीकरण (13.24) तथा समीकरण (13.11) से हम यह देखते हैं कि

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

तथा लोलक का आवर्तकाल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \tag{13.25}$$

अब क्योंकि लोलक की डोरी द्रव्यहीन है, अतः जड़त्व आघूर्ण I केवल mL^2 के तुल्य होगा। इससे हमें सरल लोलक के आवर्त काल के लिए सुपरिचित सूत्र मिल जाता है

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{13.26}$$

▶ ***उदाहरण 13.8*** उस सरल लोलक की लंबाई क्या है, जो हर सेकंड के बाद टिक करता है ?

हल समीकरण (13.26) से किसी सरल लोलक का आवर्तकाल,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

इस संबंध से हमें प्राप्त होता है,

$$L = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

हर एक सेकंड के बाद टिक करने वाले सरल लोलक का आवर्तकाल T, 2 s होता है । अतः $g = 9.8$ m s^{-2} तथा $T = 2$ s के लिए सरल लोलक की लंबाई

$$L = \frac{9.8\,(\mathrm{m\,s^{-2}}) \times 4\,(\mathrm{s^2})}{4\pi^2}$$

$$= 1 \text{ m}$$ ◀

सारांश

1. वह गति जो स्वयं को दोहराती है *आवर्ती गति* कहलाती है,
2. एक दोलन अथवा चक्र को पूरा करने के लिए आवश्यक समय T को *आवर्तकाल* कहते हैं । यह आवृत्ति से इस प्रकार संबंधित है,

$$T = \frac{1}{\nu}$$

किसी आवर्ती अथवा दोलनी गति की *आवृत्ति* उसके द्वारा 1 सेकंड में पूरे किए गए दोलनों की संख्या होती है । SI मात्रक पद्धति में इसे हर्ट्ज़ में मापा जाता है;

1 हर्ट्ज़ = 1Hz = 1 दोलन प्रति सेकंड = $1 s^{-1}$

3. *सरल आवर्त गति* में, किसी कण का उसकी साम्यावस्था की स्थिति से विस्थापन $x(t)$ इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) \quad \text{(विस्थापन)}$$

यहाँ x_m *विस्थापन का आयाम* $(\omega t + \phi)$ *गति की कला,* तथा ϕ *कला स्थिरांक* है । कोणीय आवृत्ति ω गति के आवर्तकाल तथा आवृत्ति से इस प्रकार संबंधित होती है

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad \text{(कोणीय आवृत्ति)}$$

4. सरल आवर्त गति, एकसमान वर्तुल गति के उस वृत्त के व्यास पर प्रक्षेप होती है, जिस पर गति हो रही है ।
5. सरल आवर्त गति के समय कण के वेग तथा त्वरण को समय t के फलन के रूप में इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$\upsilon(t) = -\omega A_m \sin(\omega t + \phi) \quad \text{(वेग)}$$
$$a(t) = -\omega^2 A_m \cos(\omega t + \phi)$$
$$= -\omega^2 x(t) \quad \text{(त्वरण)}$$

समयकालिक क्रिया और सरल आवर्त गति द्वारा हम वेग और गति को इस प्रकार देख सकते हैं।

6. सरल आवर्त गति किसी कण की वह गति होती है जिसमें उस कण पर कोई ऐसा बल आरोपित रहता है, जो कण के विस्थापन के अनुक्रमानुपाती, तथा सदैव गति के केंद्र की ओर निर्दिष्ट होता है ।
7. सरल आवर्त गति करते किसी कण में, किसी भी क्षण, गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ तथा स्थितिज ऊर्जा $U = \frac{1}{2}kx^2$ होती है। यदि कोई घर्षण न हो, तो निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा, $E = K+U$ सदैव ही अचर रहती है यद्यपि K और U परिवर्तित होते हैं ।
8. m द्रव्यमान का कोई कण जो हुक के नियम के अनुसार लगे प्रत्यानयन बल $F = -kx$ के प्रभाव में दोलन करता है, सरल आवर्त गति दर्शाता है जिसके लिए,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(कोणीय आवृत्ति)}$$

तथा

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(आवर्तकाल)}$$

ऐसे निकाय को रैखिक दोलक भी कहते हैं ।

9. लघु कोणों में दोलन करते सरल लोलक की गति सन्निकट सरल आवर्त गति होती है । इसका आवर्तकाल,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

भौतिक राशि	प्रतीक	विमाएँ	मात्रक	टिप्पणी
आवर्तकाल	T	[T]	s	गति की स्वयं पुनरावृत्ति के लिए न्यूनतम समय
आवृत्ति	f या ν	$[T^{-1}]$	s^{-1}	$\nu = \frac{1}{T}$
कोणीय आवृत्ति	ω	$[T^{-1}]$	s^{-1}	$= 2\pi\nu$
कला नियतांक	ϕ	विमाहीन	रेडियन	सरल आवर्त गति में विस्थापन की कला का आरंभिक मान
बल नियतांक	k	$[MT^{-2}]$	$N\ m^{-1}$	सरल आवर्त गति में $F = -k\,x$

विचारणीय विषय

1. आवर्तकाल T वह *न्यूनतम समय* होता है जिसके पश्चात् गति की स्वयं पुनरावृत्ति होती है। इस प्रकार, समय अंतराल nT के पश्चात् गति की स्वयं पुनरावृत्ति होती है, यहाँ n कोई पूर्णांक है।
2. प्रत्येक आवर्ती गति सरल आवर्त गति नहीं होती। केवल वही आवर्ती गति जो बल-नियम $F = -k\,x$ द्वारा नियंत्रित होती है, सरल आवर्त गति होती है।
3. वर्तुल गति व्युत्क्रम-वर्ग नियम बल (जैसे ग्रहीय गति में) तथा द्विविमा में सरल आवर्त बल $-m\omega^2 r$ के कारण उत्पन्न हो सकती है। बाद के प्रकरण में, गति की कलाएँ, दो लंबवत् दिशाओं (x तथा y) में $\pi/2$ rad द्वारा भिन्न होनी चाहिए। इस प्रकार, कोई कण जिसकी आरंभिक स्थिति $(0, a)$ तथा वेग $(\omega A, 0)$ है $-m\,\omega^2 r$ बल आरोपित किए जाने पर A त्रिज्या के वृत्त में एकसमान वर्तुल गति करेगा।
4. ω के किसी दिए गए मान की रैखिक सरल आवर्त गति के लिए दो आरंभिक शर्तें आवश्यक हैं और ये शर्तें गति को पूर्णतः निर्धारित करने के लिए पर्याप्त हैं। ये आवश्यक शर्तें हो सकती हैं (i) आरंभिक स्थिति तथा आरंभिक वेग, अथवा (ii) आयाम तथा कला, अथवा (iii) ऊर्जा तथा कला।
5. उपरोक्त बिंदु (4) से, दिए गए आयाम अथवा ऊर्जा गति की कला का निर्धारण आरंभिक स्थिति अथवा आरंभिक वेग द्वारा किया जाता है।
6. यादृच्छिक आयामों तथा कलाओं वाली दो सरल आवर्त गतियों का संयोजन व्यापक रूप में आवर्ती नहीं होता। यह केवल तभी आवर्ती होता है जब एक गति की आवृत्ति दूसरी गति की आवृत्ति की पूर्णांक गुणज हो। तथापि, किसी आवर्ती गति को सदैव ही उपयुक्त आयामों की अनंत सरल आवर्त गतियों के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
7. सरल आवर्त गति का आवर्तकाल आयाम अथवा ऊर्जा अथवा कला नियतांक पर निर्भर नहीं करता। गुरुत्वाकर्षण के अधीन ग्रहीय कक्षों के आवर्तकाल इसके विपरीत हैं (केप्लर का तृतीय नियम)।
8. किसी सरल लोलक की गति लघु कोणीय विस्थापन के लिए ही सरल आवर्त गति होती है।
9. किसी कण की गति यदि सरल आवर्त गति है, तो उसके विस्थापन को निम्न रूपों में से किसी एक रूप में व्यक्त किया जाना चाहिए :

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t;$$

$$x = A\cos(\omega t + \alpha);\; x = B\sin(\omega t + \beta)$$

ये तीनों रूप पूर्णतः समतुल्य हैं (किसी भी एक रूप को अन्य दो रूपों के पदों में व्यक्त किया जा सकता है।)

अभ्यास

13.1 नीचे दिए गए उदाहरणों में कौन आवर्ती गति को निरूपित करता है ?

(i) किसी तैराक द्वारा नदी के एक तट से दूसरे तट तक जाना और अपनी एक वापसी यात्रा पूरी करना।

(ii) किसी स्वतंत्रतापूर्वक लटकाए गए दंड चुंबक को उसकी N-S दिशा से विस्थापित कर छोड़ देना।

(iii) अपने द्रव्यमान केंद्र के परितः घूर्णी गति करता कोई हाइड्रोजन अणु।

(iv) किसी कमान से छोड़ा गया तीर।

13.2 नीचे दिए गए उदाहरणों में कौन (लगभग) सरल आवर्त गति को तथा कौन आवर्ती परंतु सरल आवर्त गति नहीं निरूपित करते हैं ?

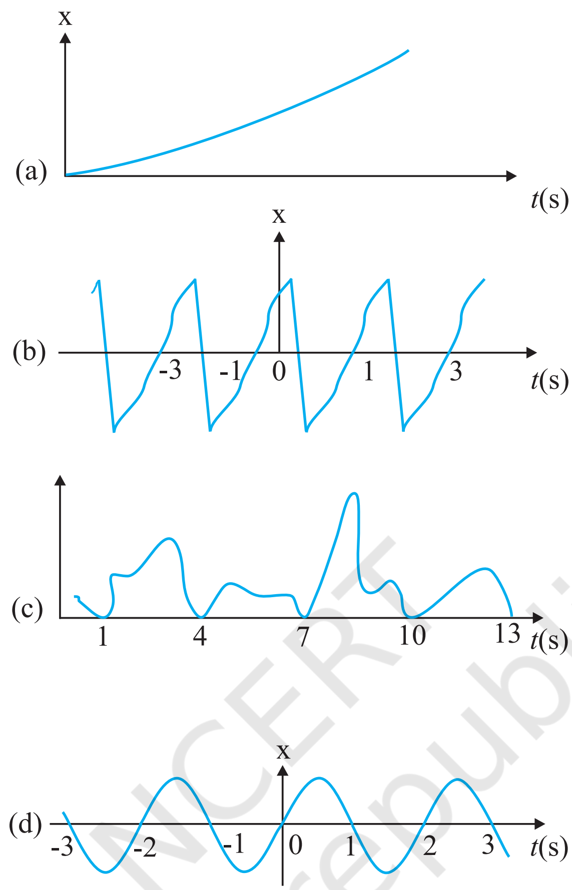
(i) पृथ्वी की अपने अक्ष के परितः घूर्णन गति।

(ii) किसी U-नली में दोलायमान पारे के स्तंभ की गति।

(iii) किसी चिकने वक्रीय कटोरे के भीतर एक बॉल बेयरिंग की गति जब उसे निम्नतम बिंदु से कुछ ऊपर के बिंदु से मुक्त रूप से छोड़ा जाए।

(iv) किसी बहुपरमाणुक अणु की अपनी साम्यावस्था की स्थिति के परितः व्यापक कंपन।

13.3 चित्र 13.18 में किसी कण की रैखिक गति के लिए चार x-t आरेख दिए गए हैं। इनमें से कौन-सा आरेख आवर्ती गति का निरूपण करता है ? उस गति का आवर्तकाल क्या है (आवर्ती गति वाली गति का)।



चित्र 13.18

13.4 नीचे दिए गए समय के फलनों में कौन (a) सरल आवर्त गति (b) आवर्ती परंतु सरल आवर्त गति नहीं, तथा (c) अनावर्ती गति का निरूपण करते हैं। प्रत्येक आवर्ती गति का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए : (ω कोई धनात्मक अचर है।)

(a) $\sin \omega t - \cos \omega t$

(b) $\sin^3 \omega t$

(c) $3 \cos \left(\frac{\pi}{4} - 2\,\omega t\right)$

(d) $\cos \omega t + \cos 3\,\omega t + \cos 5\,\omega t$

(e) $\exp(-\omega^2 t^2)$

(f) $1 + \omega t + \omega^2 t^2$

13.5 कोई कण एक दूसरे से 10 cm दूरी पर स्थित दो बिंदुओं A तथा B के बीच रैखिक सरल आवर्त गति कर रहा है। A से B की ओर की दिशा को धनात्मक दिशा मानकर वेग, त्वरण तथा कण पर लगे बल के चिह्न ज्ञात कीजिए जबकि यह कण

(a) A सिरे पर है,

(b) B सिरे पर है,

(c) A की ओर जाते हुए AB के मध्य बिंदु पर है,

(d) A की ओर जाते हुए B से 2 cm दूर है,

(e) B की ओर जाते हुए A से 3 cm दूर है, तथा

(f) A की ओर जाते हुए B से 4 cm दूर है।

13.6 नीचे दिए गए किसी कण के त्वरण a तथा विस्थापन x के बीच संबंधों में से किससे सरल आवर्त गति संबद्ध है :

(a) $a = 0.7\,x$

(b) $a = -200\,x^2$

(c) $a = -10\,x$

(d) $a = 100\,x^3$

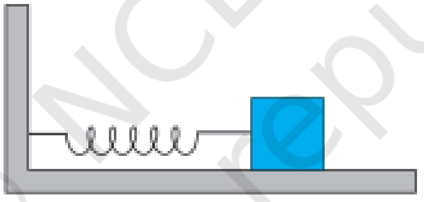
13.7 सरल आवर्त गति करते किसी कण की गति का वर्णन नीचे दिए गए विस्थापन फलन द्वारा किया जाता है,

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

यदि कण की आरंभिक ($t = 0$) स्थिति 1 cm तथा उसका आरंभिक वेग π cm s^{-1} है, तो कण का आयाम तथा आरंभिक कला कोण क्या है ? कण की कोणीय आवृत्ति π s^{-1} है। यदि सरल आवर्त गति का वर्णन करने के लिए कोज्या (cos) फलन के स्थान पर हम ज्या (sin) फलन चुनें; $x = B\sin(\omega t + \alpha)$, तो उपरोक्त आरंभिक प्रतिबंधों में कण का आयाम तथा आरंभिक कला कोण क्या होगा ?

13.8 किसी कमानीदार तुला का पैमाना 0 से 50 kg तक अंकित है और पैमाने की लंबाई 20 cm है। इस तुला से लटकाया गया कोई पिण्ड, जब विस्थापित करके मुक्त किया जाता है, 0.6 s के आवर्तकाल से दोलन करता है। पिंड का भार कितना है ?

13.9 1200 N m^{-1} कमानी-स्थिरांक की कोई कमानी चित्र 13.19 में दर्शाए अनुसार किसी क्षैतिज मेज से जड़ी है। कमानी के मुक्त सिरे से 3 kg द्रव्यमान का कोई पिण्ड जुड़ा है। इस पिण्ड को एक ओर 2.0 cm दूरी तक खींच कर मुक्त किया जाता है,



चित्र 13.19

(i) पिण्ड के दोलन की आवृत्ति,

(ii) पिण्ड का अधिकतम त्वरण, तथा

(iii) पिण्ड की अधिकतम चाल ज्ञात कीजिए।

13.10 अभ्यास 13.9 में, मान लीजिए जब कमानी अतानित अवस्था में है तब पिण्ड की स्थिति $x = 0$ है तथा बाएँ से दाएँ की दिशा x-अक्ष की धनात्मक दिशा है। दोलन करते पिण्ड के विस्थापन x को समय के फलन के रूप मे दर्शाइए, जबकि विराम घड़ी को आरंभ ($t = 0$) करते समय पिण्ड,

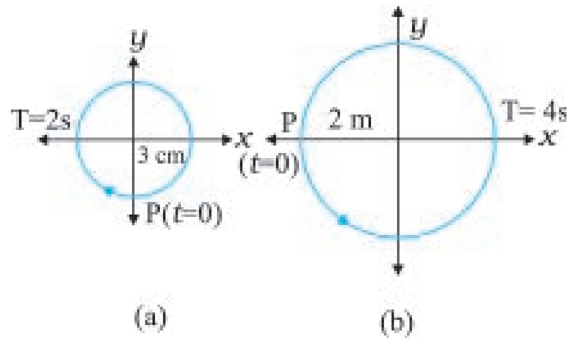
(a) अपनी माध्य स्थिति,

(b) अधिकतम तानित स्थिति, तथा

(c) अधिकतम संपीडन की स्थिति पर है।

सरल आवर्त गति के लिए ये फलन एक दूसरे से आवृत्ति में, आयाम में अथवा आरंभिक कला में किस रूप में भिन्न हैं ?

13.11 चित्र 13.20 में दिए गए दो आरेख दो वर्तुल गतियों के तदनुरूपी हैं। प्रत्येक आरेख पर वृत्त की त्रिज्य, परिक्रमण-काल, आरंभिक स्थिति और परिक्रमण की दिशा दर्शायी गई है। प्रत्येक प्रकरण में, परिक्रमण करते कण के त्रिज्य-सदिश के x-अक्ष पर प्रक्षेप की तदनुरूपी सरल आवर्त गति ज्ञात कीजिए।



चित्र 13.20

13.12 नीचे दी गई प्रत्येक सरल आवर्त गति के लिए तदनुरूपी निर्देश वृत्त का आरेख खींचिए। घूर्णी कण की आरंभिक (t = 0) स्थिति, वृत्त की त्रिज्या तथा कोणीय चाल दर्शाइए। सुगमता के लिए प्रत्येक प्रकरण में परिक्रमण की दिशा वामावर्त लीजिए। (x को cm में तथा t को s में लीजिए।)

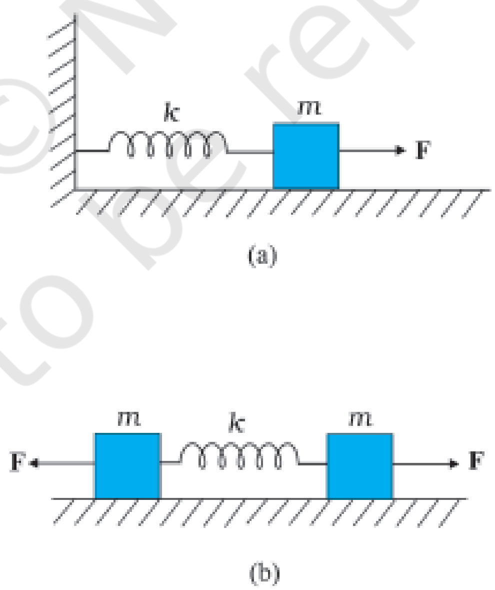
(a) $x = -2 \sin (3t + \pi/3)$

(b) $x = \cos (\pi/6 - t)$

(c) $x = 3 \sin (2\pi t + \pi/4)$

(d) $x = 2 \cos \pi t$

13.13 चित्र 13.21(a) में k बल-स्थिरांक की किसी कमानी के एक सिरे को किसी दृढ़ आधार से जकड़ा तथा दूसरे मुक्त सिरे से एक द्रव्यमान m जुड़ा दर्शाया गया है। कमानी के मुक्त सिरे पर बल **F** आरोपित करने से कमानी तन जाती है। चित्र 13.21(b) में उसी कमानी के दोनों मुक्त सिरों से द्रव्यमान m जुड़ा दर्शाया गया है। कमानी के दोनों सिरों को चित्र 13.21 में समान बल **F** द्वारा तानित किया गया है।



चित्र 13.21

(a) दोनों प्रकरणों में कमानी का अधिकतम विस्तार क्या है?

(b) यदि (a) का द्रव्यमान तथा (b) के दोनों द्रव्यमानों को मुक्त छोड़ दिया जाए, तो प्रत्येक प्रकरण में दोलन का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए।

13.14 किसी रेलगाड़ी के इंजन के सिलिंडर हैड में पिस्टन का स्ट्रोक (आयाम का दो गुना) 1.0 m का है । यदि पिस्टन 200 rad/min की कोणीय आवृत्ति से सरल आवर्त गति करता है, तो उसकी अधिकतम चाल कितनी है ?

13.15 चंद्रमा के पृष्ठ पर गुरुत्वीय त्वरण 1.7 m s^{-2} है । यदि किसी सरल लोलक का पृथ्वी के पृष्ठ पर आवर्तकाल 3.5 s है, तो उसका चंद्रमा के पृष्ठ पर आवर्तकाल कितना होगा ? (पृथ्वी के पृष्ठ पर g = 9.8 m s^{-2})

13.16 किसी कार की छत से l लंबाई का कोई सरल लोलक, जिसके लोलक का द्रव्यमान M है, लटकाया गया है । कार R त्रिज्या की वृत्तीय पथ पर एकसमान चाल v से गतिमान है । यदि लोलक त्रिज्य दिशा में अपनी साम्यावस्था की स्थिति के इधर-उधर छोटे दोलन करता है, तो इसका आवर्तकाल क्या होगा ?

13.17 आधार क्षेत्रफल A तथा ऊँचाई h के एक कॉर्क का बेलनाकार टुकड़ा ρ_l घनत्व के किसी द्रव में तैर रहा है । कॉर्क को थोड़ा नीचे दबाकर स्वतंत्र छोड़ देते हैं, यह दर्शाइए कि कॉर्क ऊपर-नीचे सरल आवर्त दोलन करता है जिसका आवर्तकाल

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{h\rho}{\rho_l g}}$ है ।

यहाँ ρ कॉर्क का घनत्व है (द्रव की श्यानता के कारण अवमंदन को नगण्य मानिए) ।

13.18 पारे से भरी किसी U नली का एक सिरा किसी चूषण पंप से जुड़ा है, तथा दूसरा सिरा वायुमंडल में खुला छोड़ दिया गया है । दोनों स्तंभों में कुछ दाबांतर बनाए रखा जाता है । यह दर्शाइए कि जब चूषण पंप को हटा देते हैं, तब U नली में पारे का स्तंभ सरल आवर्त गति करता है ।

11089CH15

अध्याय 14

तरंगें

14.1 भूमिका
14.2 अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्घ्य तरंगें
14.3 प्रगामी तरंगों में विस्थापन संबंध
14.4 प्रगामी तरंग की चाल
14.5 तरंगों के अध्यारोपण का सिद्धांत
14.6 तरंगों का परावर्तन
14.7 विस्पंदें

सारांश
विचारणीय विषय
अभ्यास

14.1 भूमिका

पिछले अध्याय में हमने ऐसे पिण्डों की गति के बारे में अध्ययन किया जो एकाकी दोलन करते हैं। यदि कोई निकाय इसी प्रकार के पिण्डों का समूह है, तो उस निकाय में क्या होगा? एक द्रव्यमान युक्त माध्यम इसी प्रकार के निकाय का उदाहरण है। इस प्रकार के माध्यम में प्रत्यास्थ बल माध्यम के अवयवों को एक-दूसरे से बाँध रखते हैं जिसके कारण किसी एक अवयव की गति दूसरे अवयव की गति को प्रभावित करती है। यदि आप एक छोटे कंकड़ को किसी तालाब के शांत जल में धीरे से गिराएँ, तो जल का पृष्ठ विक्षुब्ध हो जाता है । यह विक्षोभ किसी एक स्थान तक ही सीमित नहीं रहता, वरन् एक वृत्त के अनुदिश बाहर की ओर संचरित होता है। यदि आप इसी प्रकार तालाब में निरंतर कंकड़ गिराते रहें, तो आप यह देखेंगे कि तालाब के पृष्ठ के जिस बिंदु पर विक्षोभ उत्पन्न हुआ है वहाँ से यह विक्षोभ वृत्तों के रूप में तीव्रता से बाहर की ओर गति करता है । हमें ऐसा प्रतीत होता है जैसे विक्षोभ बिंदु से जल स्वयं बाहर की ओर गति कर रहा हो । यदि आप विक्षुब्ध पृष्ठ पर कुछ छोटे-छोटे कॉर्क के टुकड़े धीरे से रख दें, तो आप पाएँगे कि ये कॉर्क के टुकड़े अपने-अपने स्थानों पर ही ऊपर-नीचे गति करते हैं, परंतु विक्षोभ के केंद्र बिंदु से दूर नहीं जाते अर्थात् उनकी विक्षोभ के केंद्र से दूरी नियत बनी रहती है। इससे यह प्रदर्शित होता है कि जल का द्रव्यमान स्वयं वृत्तों के साथ बाहर की ओर गति नहीं करता, बस, एक गतिशील विक्षोभ उत्पन्न हो जाता है । इसी प्रकार जब हम बोलते हैं, तो ध्वनि हवा (माध्यम) में हमसे दूर जाती है । परंतु इस प्रक्रिया में (वायु) एक भाग से दूसरे भाग में प्रवाहित नहीं होती । वायु में उत्पन्न हुए विक्षोभ हमें स्पष्ट रूप से दिखाई नहीं देते, हमारे कानों अथवा माइक्रोफोनों द्वारा ही हम इनको जान पाते हैं। इस प्रकार के विक्षोभों के प्रतिरूप या पैटर्न जो द्रव्य के वास्तविक भौतिक स्थानांतरण अथवा समूचे द्रव्य के प्रवाह के बिना ही माध्यम के एक स्थान से दूसरे स्थान तक गति करते हैं, **तरंग** कहलाते हैं । इस अध्याय में हम तरंगों के विषय में अध्ययन करेंगे ।

तरंगों द्वारा एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक ऊर्जा तथा विक्षोभ के पैटर्न की सूचना का संचरण होता है। हमारा समस्त संचार-तंत्र तरंगों द्वारा संकेतों के संचरण पर निर्भर करता है। वाक् (बातचीत) का अर्थ है वायु में ध्वनि तरंगें उत्पन्न करना तथा श्रवण

उनके संसूचन को व्यक्त करता है। सूचना का आदान-प्रदान प्रायः विभिन्न प्रकार की तरंगों के माध्यम द्वारा होता है। उदाहरण के लिए ध्वनि तरंगों को सर्वप्रथम विद्युत संकेतों के रूप में परिवर्तित किया जा सकता है जिनसे विद्युत-चुंबकीय तरंगें जनित की जा सकती हैं जिनका संचरण प्रकाशिक रेशों की केबिल अथवा उपग्रह द्वारा हो सकता है। मूल संकेत के संसूचन में समान्यतया यही चरण व्युत्क्रम क्रम में अपनाए जाते हैं।

सभी तरंगों को संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता नहीं होती । हम जानते हैं कि प्रकाश तरंगें निर्वात से गमन कर सकती हैं । हमसे सैकड़ों प्रकाश वर्ष की दूरी पर स्थित तारों से उत्सर्जित प्रकाश अंतरतारकीय अंतरिक्ष, जो व्यावहारिक रूप से निर्वात ही है, से गमन करता हुआ हम तक पहुँचता है ।

किसी डोरी तथा जल में उत्पन्न तरंगें, ध्वनि तरंगें, भूकंपी तरंगें जैसी सुपरिचित तरंगें यांत्रिक तरंगों के रूप में जानी जाती हैं। इन सभी तरंगों के संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता होती है, ये बिना माध्यम के संचरित नहीं हो सकतीं। इनका संचरण माध्यम के कणों के दोलनों के कारण संभव हो पाता है तथा माध्यम के प्रत्यास्थ गुणों पर निर्भर करता है। विद्युत-चुंबकीय तरंगें सर्वथा भिन्न प्रकार की तरंगें होती हैं जिनके विषय में आप कक्षा 12 में अध्ययन करेंगे। विद्युत-चुंबकीय तरंगों के संचरण के लिए माध्यम का होना आवश्यक नहीं है– इनका संचरण निर्वात में भी होता है। प्रकाश, रेडियो तरंगें, X-किरणें सभी विद्युत-चुंबकीय किरणें हैं। निर्वात में सभी विद्युत-चुंबकीय तरंगों की चाल, c, समान होती है जिसका मान है:

$$c = 29{,}97{,}92{,}458 \text{ m s}^{-1} \tag{14.1}$$

तीसरी प्रकार की एक अन्य तरंग है जिसे द्रव्य तरंग के नाम से जाना जाता है। यह द्रव्य के इलेक्ट्रॉन, प्रोटान, न्यूट्रान, परमाणु तथा अणु जैसे घटकों से संबद्ध हैं। ये तरंगें प्रकृति के क्वांटम यांत्रिकीय विवरण में प्रकट होती हैं जिसके विषय में आप अगली कक्षाओं में पढ़ेंगे । यद्यपि ये तरंगें संकल्पनात्मक रूप में यांत्रिक तथा विद्युत चुंबकीय तरंगों की तुलना में अधिक अमूर्त हैं, तथापि इनका अनुप्रयोग आधुनिक प्रौद्योगिकी की बहुत सी मूल युक्तियों में पाया जाता है; इलेक्ट्रॉन से संबद्ध द्रव्य तरंगों का उपयोग इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी में किया जाता है ।

इस अध्याय में हम केवल यांत्रिक तरंगों के बारे में, जिनके संचरण के लिए द्रव्यात्मक माध्यम आवश्यक है, अध्ययन करेंगे ।

पुरातन काल से ही हमारी कला तथा साहित्य पर तरंगों का सौंदर्यबोधात्मक प्रभाव दृष्टिगोचर होता है, फिर भी तरंग गति का वैज्ञानिक विश्लेषण सर्वप्रथम सत्रहवीं शताब्दी में किया गया था । क्रिश्चियन हाइगेन्स (1629-1695), राबर्ट हुक तथा आइज़क न्यूटन कुछ ऐसे प्रसिद्ध भौतिकविद हैं जिनके नाम तरंग गति की भौतिकी से संबद्ध हैं । कमानी से बँधे पिण्डों के दोलनों की भौतिकी तथा सरल लोलक की भौतिकी के पश्चात् ही तरंगों की भौतिकी को समझा गया । प्रत्यास्थ माध्यमों में तरंगों का आवर्ती दोलनों के साथ अंतरंग संबंध होता है । (तानित डोरियाँ, कुंडलित कमानियाँ, वायु आदि प्रत्यास्थ माध्यमों के उदाहरण हैं ।) इस संबंध की व्याख्या हम सरल उदाहरणों द्वारा करेंगे ।

चित्र 14.1 में दर्शाए अनुसार एक दूसरे से संबद्ध कमानियों की व्यवस्था पर विचार कीजिए । यदि इसके एक सिरे की कमानी को यकायक खींचकर छोड़ दें, तो उत्पन्न विक्षोभ दूसरे सिरे तक गमन करता है । इस प्रक्रिया में क्या होता है ? यकायक खींचने पर पहली कमानी अपनी साम्यावस्था की लंबाई से विक्षोभित होती है । चूँकि दूसरी कमानी पहली कमानी से संबद्ध है, अतः उसमें तनाव अथवा संपीडन होता है और इस प्रकार यह प्रक्रिया आगे बढ़ती जाती है । यहाँ विक्षोभ तो एक सिरे से दूसरे तक संचरित हो जाता है, परंतु प्रत्येक कमानी अपनी साम्यावस्था की स्थिति के इधर-उधर ही लघु दोलन करती रहती है । ऐसे ही एक व्यावहारिक उदाहरण के रूप में रेलवे स्टेशन पर विराम की स्थिति में खड़ी किसी रेलगाड़ी पर विचार कीजिए । रेलगाड़ी के विभिन्न

चित्र 14.1 एक-दूसरे से संबद्ध कमानियों का संग्रह । सिरे A को यकायक खींचा जाता है; तब विक्षोभ दूसरे सिरे तक संचरित हो जाता है ।

डिब्बे, कमानी युग्मकों द्वारा एक-दूसरे से युग्मित होते हैं । जब इन डिब्बों के किसी एक सिरे से किसी इंजन को जोड़ते हैं, तो वह अपने से अगले डिब्बे को धक्का देता है तथा यह धक्का एक डिब्बे से दूसरे डिब्बे में, दूसरे से फिर तीसरे में, इसी प्रकार आगे संचरित होते हुए आखिरी डिब्बे तक पहुँच जाता है, लेकिन समस्त रेलगाड़ी अपने ही स्थान पर खड़ी रहती है ।

आइए, अब हम वायु में ध्वनि तरंगों के संचरण पर विचार करते हैं । जैसे ही कोई ध्वनि तरंग वायु से होकर गुजरती है, तो वह उस स्थान की वायु के छोटे से क्षेत्र को संपीडित अथवा विस्तारित करती है । इसके कारण उस छोटे क्षेत्र की वायु के घनत्व में, मान लीजिए ($\delta\rho$), परिवर्तन होता है । दाब, प्रति एकांक क्षेत्रफल पर आरोपित बल होता है, अतः कमानी की ही भाँति

इस स्थिति में भी विक्षोभ के अनुक्रमानुपात में 'प्रत्यानयन बल' उत्पन्न हो जाता है । यहाँ इस प्रकरण में, घनत्व में परिवर्तन, कमानी में उत्पन्न संपीडन अथवा विस्तारण के समरूप है । यदि किसी क्षेत्र को संपीडित किया जाता है, तो उस क्षेत्र के अणु बाहर निकलकर समीपवर्ती क्षेत्र में जाने का प्रयास करते हैं । इस प्रकार, समीपवर्ती क्षेत्र में घनत्व बढ़ता है, अथवा उस क्षेत्र में 'संपीडन' उत्पन्न होता है जिसके फलस्वरूप पूर्ववर्ती क्षेत्र में 'विरलन' उत्पन्न हो जाता है । यदि कोई क्षेत्र अपने चारों ओर के क्षेत्रों की तुलना में विरलित हो, तो उस क्षेत्र के चारों ओर के परिवेश की वायु उस क्षेत्र में प्रवेश करके विरलन को समीपवर्ती क्षेत्र की ओर धकेल देती है । इस प्रकार, संपीडन अथवा विरलन एक क्षेत्र से दूसरे क्षेत्र की ओर गति करते हैं, जिसके कारण वायु में विक्षोभ का संचरण संभव हो पाता है ।

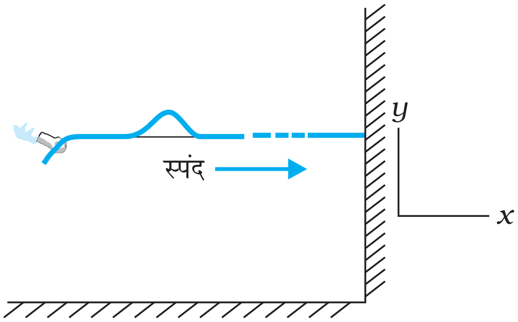
ठोसों में भी इसी के सदृश तर्क दिया जा सकता है । क्रिस्टलीय ठोसों में परमाणु अथवा परमाणुओं के समूह आवर्ती जालकों में व्यवस्थित होते हैं । इनमें, प्रत्येक परमाणु अथवा परमाणुओं का समूह, अपने चारों ओर के परमाणुओं द्वारा आरोपित बलों के कारण, साम्यावस्था में होता है । यदि अन्य परमाणुओं को स्थिर रखते हुए किसी एक परमाणु को विस्थापित किया जाए, तो ठीक उसी प्रकार जैसा कि कमानी के प्रकरण में था, इस स्थिति में भी एक प्रत्यानयन बल उत्पन्न हो जाता है । अत: हम जालक (lattice) के परमाणुओं को अंत्य बिंदुओं की भाँति ले सकते हैं तथा परमाणु-युगलों के बीच कमानियाँ लगी मान सकते हैं ।

अब हम इस अध्याय के अगले अनुभागों में तरंगों के विभिन्न अभिलाक्षणिक गुणों की चर्चा करेंगे ।

14.2 अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्घ्य तरंगें

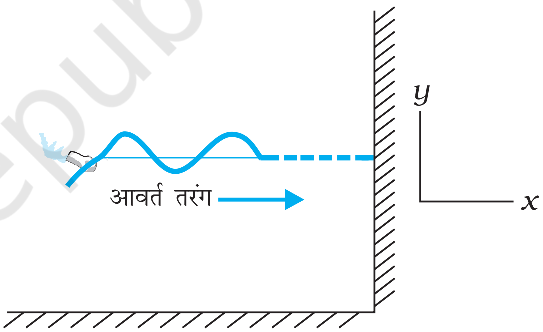
हम जानते हैं कि यांत्रिक तरंगों की गति में माध्यम के घटक दोलन करते हैं। यदि माध्यम के घटक तरंग की गति की दिशा के लंबवत् दोलन करते हैं तो ऐसी तरंग को हम अनुप्रस्थ तरंग कहते हैं। यदि माध्यम के घटक तरंग की गति की दिशा के अनुदिश दोलन करते हैं तो तरंग को अनुदैर्घ्य तरंग के रूप में जाना जाता है।

चित्र 14.2 में किसी डोरी के अनुदिश एक ऐसे स्पंद को गति करते दिखाया गया है जिसे डोरी को एक बार ऊपर-नीचे झटकने के बाद उत्पन्न किया गया है। यदि स्पंद के आमाप की तुलना में डोरी की लंबाई अत्यधिक हो तो उसके दूसरे सिरे तक पहुँचने से पहले ही स्पंद का अवमंदन हो जाएगा। अत: दूसरे सिरे पर स्पंद के परावर्तन को अनदेखा किया जा सकता है। चित्र 14.3



चित्र 14.2 जब किसी तानित डोरी के अनुदिश (x-अक्ष) कोई एकल स्पंद गतिशील होता है तो डोरी का कोई प्रतिरूपी अवयव ऊपर-नीचे (y-अक्ष) दोलन करता है ।

में भी ऐसी ही एक स्थिति प्रदर्शित की गई है अंतर केवल इतना है कि इसमें बाह्य कारक द्वारा डोरी के एक सिरे पर ऊपर-नीचे की ओर सतत आवर्ती ज्यावक्रीय झटके प्रदान किए जा रहे हैं। इस प्रकार से डोरी में उत्पन्न विक्षोभ का परिणाम उसमें प्रग्रामी



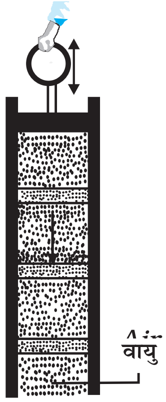
चित्र 14.3 किसी डोरी के अनुदिश प्रेषित कोई आवर्त (ज्यावक्रीय) तरंग अनुप्रस्थ तरंग का एक उदाहरण है। तरंग के क्षेत्र में डोरी का कोई प्रतिरूपी अवयव तरंग की गमन दिशा के लंबवत् अपनी साम्यावस्था के सापेक्ष दोलन करता है।

ज्यावक्रीय तरंग होता है। दोनों ही परिस्थितियों में माध्यम के अवयव अपनी माध्य साम्यावस्था के इर्द-गिर्द दोलन करते हैं जबकि स्पंद अथवा तरंग उनसे संचरित होती है। दोलन डोरी में तरंग की गति की दिशा के लंबवत् हैं, अत: यह अनुप्रस्थ तरंग का एक उदाहरण है।

हम किसी तरंग पर दो प्रकार से विचार कर सकते हैं। हम किसी निश्चित काल-क्षण पर आकाश में तरंग का चित्रण कर सकते हैं। इससे हमें किसी काल-क्षण पर तरंग की आकृति मिल जाएगी। एक अन्य विधि तरंग की किसी स्थान विशेष पर विचार

करना है अर्थात् हम अपना ध्यान डोरी के किसी निश्चित अवयव पर केंद्रित करें तथा समय के साथ इसके दोलनों को देखें।

चित्र 14.4 में अनुदैर्ध्य तरंगों के सबसे सामान्य उदाहरण ध्वनि तरंगों की स्थिति प्रदर्शित की गई है। वायु से भरे किसी लंबे पाइप के एक सिरे पर एक पिस्टन लगा है। पिस्टन को एक बार अंदर की ओर धकेलते और फिर बाहर की ओर खींचने से संपीडन



चित्र 14.4 पिस्टन को आगे-पीछे गति कराकर वायु से भरी नली में ध्वनि तरंग उत्पन्न की जाती है। चूँकि वायु-अवयव के दोलन तरंग गति की दिशा के समांतर हैं, अतः यह अनुदैर्ध्य तरंग है।

(उच्च घनत्व) तथा विरलन (न्यून घनत्व) का स्पंद उत्पन्न हो जाएगा। यदि पिस्टन को अंदर की ओर धकेलने तथा बाहर की ओर खींचने का क्रम सतत तथा आवर्ती (ज्यावक्रीय) हो तो एक ज्यावक्रीय तरंग उत्पन्न होगी जो पाइप की लंबाई के अनुदिश वायु में गमन करेगी। स्पष्ट रूप से यह अनुदैर्ध्य तरंग का उदाहरण है।

उपरोक्त वर्णित तरंगें, चाहे वह अनुप्रस्थ हों अथवा अनुदैर्ध्य, प्रगामी तरंगें हैं क्योंकि वह माध्यम के एक बिन्दु से दूसरे बिंदु तक गमन करती हैं। जैसा कि पहले बताया गया है, वह द्रव्य जिससे तरंग संचरित होती है, गति नहीं करता है। उदाहरणार्थ, किसी धारा में जल की पूर्ण रूप से गति होती है। परन्तु, किसी जल तरंग में विक्षोभ गति करते हैं न कि पूर्ण रूप से जल। इसी प्रकार, पवन (वायु का पूर्ण रूप से गति) तथा ध्वनि तरंग को एक नहीं समझना चाहिए– ध्वनि तरंग में विक्षोभ (दाब घनत्व में) का वायु में संचरण होता है वायु माध्यम पूर्ण रूपेण गति नहीं करता है।

अनुप्रस्थ तरंगों में कणों की गति तरंग संचरण की दिशा के लंबवत् होती है। अतः तरंग संचरण के समय माध्यम के प्रत्येक अवयव में अपरूपण विकृति होती है। अतः अनुप्रस्थ तरंगों का संचरण केवल उन्हीं माध्यमों, जैसे ठोसों में हो सकता है जो अपरूपक प्रतिबलों का परिपालन कर सकें जबकि तरलों में यह संचरण नहीं हो सकता। तरलों के साथ-साथ ठोस भी संपीडन विकृति का प्रतिपालन कर सकते हैं, अतः अनुदैर्ध्य तरंगों का संचरण सभी प्रत्यास्थ माध्यमों में कराया जा सकता है। उदाहरण के लिए, स्टील जैसे माध्यमों में अनुप्रस्थ एवं अनुदैर्ध्य दोनों प्रकार की तरंगें संचरित हो सकती हैं, जबकि वायु में केवल अनुदैर्ध्य यांत्रिक तरंगों का ही संचरण संभव है। जल के पृष्ठ पर दो प्रकार की तरंग होती हैं : केशिकात्वीच (अथवा पृष्ठ तनावी) तरंगें तथा गुरुत्व तरंगें। पहले प्रकार की तरंगें काफी कम तरंगदैर्ध्य की उर्मिकाएं होती हैं जिनकी तरंगदैर्ध्य कुछ सेंटीमीटर से अधिक नहीं होती तथा इनके बनने का कारण जल के पृष्ठ तनाव के कारण प्रत्यानयन बल होता है। गुरुत्व तरंगों की तरंगदैर्ध्य का प्रारूपिक परिसर कई मीटर से कई सौ मीटर तक होता है। ये तरंगें गुरुत्वीय खिंचाव के रूप में लगने वाले प्रत्यानयन बल द्वारा बनती हैं जो जल के पृष्ठ को अपने न्यूनतम स्तर पर रखने का प्रयास करती हैं।

इन तरंगों में कणों के दोलन पृष्ठ तक ही सीमित नहीं रहते बल्कि इनका विस्तार घटते आयाम के साथ तली तक होता है जल-तरंगों में कण-गति के साथ एक जटिल गति सम्मिलित होती है, वे न केवल ऊपर-नीचे गति करते हैं बल्कि उनकी पश्च तथा अग्र-गति भी होती है। समुद्र में उत्पन्न तरंगें अनुप्रस्थ तरंगें तथा अनुदैर्ध्य तरंगों का संयोजन होती हैं।

व्यापक रूप में यह पाया गया है कि एक ही माध्यम में अनुप्रस्थ तरंगों तथा अनुदैर्ध्य तरंगों की चाल भिन्न-भिन्न होती है।

▶ ***उदाहरण 14.1*** नीचे तरंग गति के कुछ उदाहरण दिए गए हैं, प्रत्येक स्थिति में यह बताइए कि क्या तरंग गति अनुप्रस्थ है, अनुदैर्ध्य है अथवा दोनों का संयोजन है :

(a) किसी लंबी कुंडलित कमानी के एक सिरे को एक ओर विस्थापित करने पर उस कमानी की किसी विभंग (ऐंठन) की गति।

(b) द्रव से भरे किसी सिलिंडर में इसके पिस्टन को आगे-पीछे करके सिलिंडर में उत्पन्न तरंगें।

(c) जल के पृष्ठ पर चलती मोटरबोट द्वारा उत्पन्न तरंगें।

(d) किसी कंपायमान क्वार्ट्ज़ क्रिस्टल द्वारा वायु में उत्पन्न पराश्रव्य तरंगें।

हल

(a) अनुप्रस्थ

(b) अनुदैर्ध्य

(c) अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्ध्य

(d) अनुदैर्ध्य ◀

14.3 प्रगामी तरंगों में विस्थापन संबंध

किसी प्रगामी तरंग के गणितीय विवरण के लिए, हमें स्थिति x तथा समय t दोनों के किसी फलन की आवश्यकता होती है। प्रत्येक

क्षण पर यह फलन तरंग की उस क्षण पर आकृति का विवरण देता है। साथ ही दी हुई प्रत्येक स्थिति पर यह फलन उस स्थिति पर माध्यम की अवयव की गति का विवरण भी देता है। यदि हम किसी ज्यावक्रीय प्रगामी तरंग (ऐसी एक तरंग चित्र 14.3 में दर्शायी गई है) का वर्णन करना चाहते हैं तो संलग्न फलन भी ज्यावक्रीय होना चाहिए। सुविधा के लिए हम किसी अनुप्रस्थ तरंग पर विचार करेंगे जिससे यदि माध्यम के किसी अवयव की स्थिति को x से निरूपित करें तो अवयव की माध्य स्थिति से विस्थापन को y से निरूपित करना होगा। किसी ज्यावक्रीय प्रगामी तरंग को तब निम्न रूप से वर्णित करते हैं

$$y\,(x,\, t) = a \sin\,(k\,x - \omega t + \phi) \qquad (14.2)$$

ज्या फलन के कोणांक में पद ϕ का तात्पर्य है कि हम ज्या और कोज्या फलनों के रैखिक संयोजन पर विचार कर रहे हैं :

$$y(x,\, t) = A \sin\,(kx - \omega t) + B \cos\,(kx - \omega t) \qquad (14.3)$$

तब समीकरण (14.2) एवं (14.3) से

$$a = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{तथा} \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$

समीकरण (14.2) क्यों ज्यावक्रीय प्रगामी तरंग निरूपित करता है यह समझने के लिए किसी निश्चित क्षण, मान लीजिए $t = t_0$, पर विचार करें। तब समीकरण (14.2) में ज्या फलन का कोणांक (kx + स्थिरांक) होगा। अतः तरंग का आकार (किसी निश्चित क्षण पर) x के फलन के रूप में ज्या तरंग है। इसी प्रकार, किसी निश्चित स्थिति $x = x_0$ पर विचार करें। तब समीकरण (14.2) में ज्या फलन का कोणांक एक स्थिरांक $-\omega t$ है। अतः किसी निश्चित स्थिति पर विस्थापन y समय के साथ ज्यावक्रीय रूप से परिवर्तित होता है। अर्थात, विभिन्न स्थितियों पर माध्यम के अवयव सरल आवर्त गति करते हैं। ध्यान दीजिए कि जैसे t का मान बढ़ता है, x का मान भी धनात्मक दिशा में बढ़ेगा जिससे $kx - \omega t + \phi$ का मान अचर रहे। अतः समीकरण (14.2) x - अक्ष के धनात्मक दिशा के अनुदिश ज्यावक्रीय (आवर्त) तरंग निरूपित करता है। इसके विपरीत, फलन

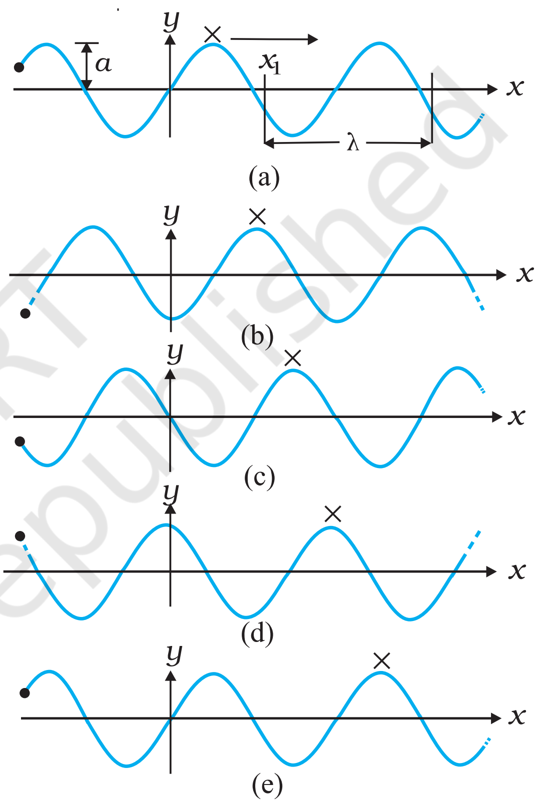
$$y(x,\, t) = a \sin\,(kx + \omega t + \phi) \qquad (14.4)$$

x-अक्ष की ऋणात्मक दिशा के अनुदिश गतिशील तरंग को निरूपित करता है। चित्र 14.5 समीकरण (14.2) के विभिन्न भौतिक राशियों के नाम दर्शाता है जिसको हम अब परिभाषित करेंगे।

$y(x,t)$	:	स्थिति x तथा समय t के फलन के रूप में विस्थापन
a	:	तरंग का आयाम
ω	:	तरंग की कोणीय आवृत्ति
k	:	कोणीय तरंग संख्या
$kx-\omega t+\phi$	:	आरंभिक कला कोण $(a+x = 0,\ t = 0)$

चित्र 14.5 समीकरण (14.2) के मानक चिह्नों की परिभाषा।

चित्र 14.6 समान अंतराल पर पाँच भिन्न मानों के लिए समीकरण (14.2) के आलेख दर्शाता है। किसी तरंग में अधिकतम धनात्मक विस्थापन वाले बिंदु को शीर्ष कहते हैं तथा अधिकतम ऋणात्मक विस्थापन वाले बिंदु को गर्त कहते हैं। यह देखने के लिए कि कोई तरंग कैसे गति करती है हम शीर्ष पर ध्यान केन्द्रित कर सकते हैं और फिर देखें कि यह शीर्ष समय के साथ कैसे गति करता है। चित्र में इसे शीर्ष पर क्रास (×) से दर्शाया गया है। इसी प्रकार हम माध्यम के किसी निश्चित स्थिति, मान लीजिए x अक्ष के मूल बिंदु पर किसी अवयव की गति पर विचार कर सकते हैं। इसे चित्र पर ठोस बिन्दु (•) से दर्शाया गया है। चित्र 14.6 के आलेख दर्शाते हैं कि मूल बिंदु पर ठोस बिंदु (•) समय के साथ आवर्ती रूप से गति करता है। अर्थात, तरंग के गति के साथ मूल बिंदु पर स्थित कण अपनी माध्य स्थिति के पारितः दोलन करता है। यह किसी अन्य स्थिति के कण के लिए भी सत्य है। हम यह भी देखते हैं कि जितने समय में ठोस बिंदु (•) एक पूर्ण दोलन करता है उतने में शीर्ष एक निश्चित दूरी चल लेता है।



चित्र 14.6 भिन्न समयों पर x-अक्ष की धनात्मक दिशा के अनुदिश गतिशील कोई आवर्ती तरंग

चित्र 14.6 के आलेखों के आधार पर अब हम समीकरण (14.2) की विभिन्न राशियों को परिभाषित करेंगे

14.3.1 आयाम तथा कला

समीकरण (14.2) में, चूंकि ज्या फलन का मान +1 तथा –1 के बीच परिवर्तित होता है, विस्थापन $y\,(x,t)$ का मान a तथा $-a$ के बीच परिवर्तित होता है। हम यदि a को धनात्मक अचर मानें तो व्यापकता का कोई ह्रास नहीं होता है। तब a माध्यक के किसी अवयव का अपने माध्य स्थिति से अधिकतम विस्थापन दर्शाता है। ध्यान दें कि विस्थापन y धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है परंतु a धनात्मक है। a को तरंग का *आयाम* कहते हैं।

समीकरण (14.2) के कोणांक की राशि $(kx - \omega t + \phi)$ को तरंग की कला कहते हैं। दिये हुए आयाम a के लिए, किसी स्थिति एवं समय पर कला तरंग का विस्थापन निर्धारित करता है। स्पष्टत: $x = 0$ तथा $t = 0$ पर कला ϕ है। अत: ϕ को आरंभिक कला कोण कहते हैं। x- अक्ष पर मूल बिंदु तथा आरंभिक क्षण का इस प्रकार चुनाव सदैव ही संभव होता है कि $\phi = 0$। अत: समीकरण (14.2) में $\phi = 0$ लेने पर व्यापकता का कोई ह्रास नहीं होता है।

14.3.2 तरंगदैर्घ्य तथा कोणीय तरंग संख्या

समान कला के दो बिंदुओं के बीच की न्यूनतम दूरी को तरंगदैर्घ्य कहते हैं और इसे सामान्यत: λ से दर्शाते हैं। सुविधा के लिए हम समान कला वाले बिंदुओं को शीर्ष या गर्त ले सकते हैं। तब तरंगदैर्घ्य दो क्रमागत शीर्षों अथवा गर्तों के बीच की दूरी है। समीकरण (14.2) में $\phi = 0$ लेने पर, $t = 0$ पर विस्थापन होगा

$$y(x, 0) = a \sin kx \qquad (14.5)$$

चूंकि कोण में 2π से प्रत्येक परिवर्तन पर ज्या फलन का मान वही रहता है :

$$\sin kx = \sin (kx + 2n\pi) = \sin k\left[x + \frac{2n\pi}{k}\right]$$

अर्थात बिंदुओं x तथा $x + \dfrac{2n\pi}{k} a$ पर विस्थापन समान होते हैं – यहाँ $n = 1, 2, 3, ...$। समान विस्थापन किसी दिये हुए क्षण पर वाले बिंदुओं के मध्य न्यूनतम दूरी $n = 1$ लेने पर प्राप्त होती है। λ तब दिया जाता है समीकरण

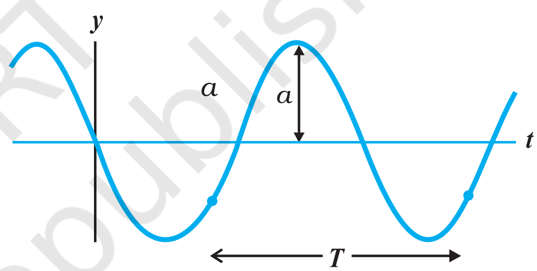
$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \text{ या } k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (14.6)$$

k को **संचरण स्थिरांक** अथवा **कोणीय तरंग संख्या** कहते हैं। इसका SI मात्रक रेडियन प्रति मीटर अथवा rad m^{-1} है।*

14.3.3 आवर्तकाल, कोणीय आवृत्ति तथा आवृत्ति

चित्र 14.7 में एक ज्यावक्रीय आलेख दिखाया गया है। यह किसी निश्चित क्षण पर तरंग का आकार नहीं दर्शाता है बल्कि माध्यम के एक अवयव (किसी निश्चित स्थिति पर) का समय के साथ विस्थापन दर्शाता है। सुविधा के लिए हम समीकरण (14.2) में $\phi = 0$ लेते हैं और अवयव (मान लीजिए $x = 0$ पर) की गति पर ध्यान देते हैं। तब हमें प्राप्त होता है

$$\begin{aligned} y(0,t) &= a \sin(-\omega t) \\ &= -a \sin \omega t \end{aligned}$$



चित्र 14.7 जब तरंग डोरी में से गुजरती है तो किसी निश्चित स्थिति पर डोरी का अवयव आयाम a से समय के साथ दोलन करता है।

तरंग के दोलन का आवर्त काल डोरी के किसी अवयव द्वारा एक पूर्ण दोलन में लिया गया समय है। अर्थात्

$$\begin{aligned} -a \sin \omega t &= -a \sin \omega(t + T) \\ &= -a \sin (\omega t + \omega T) \end{aligned}$$

चूंकि ज्या फलन प्रत्येक 2π कोण पर पुनरावृत्ति करता है,

$$\omega T = 2\pi, \text{ या } \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (14.7)$$

ω को तरंग की **कोणीय आवृत्ति** कहते हैं। इसका SI मात्रक रेडियन प्रति सेकंड अथवा rad s^{-1} है। किसी तरंग की आवृत्ति ν प्रति सेकंड दोलनों की संख्या है। अत:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (14.8)$$

*यहाँ भी rad को छोड़ सकते हैं और मात्रक को केवल m^{-1} से व्यक्त कर सकते हैं। अत:, k, इकाई लंबाई में समा सकने वाली तरंगों की संख्या का 2π से गुणा करने पर प्राप्त होने वाली m^{-1} SI मात्रक में मापी जाने वाली राशि है।

ν को हर्ट्ज (Hz) में मापते हैं।

उपर्युक्त चर्चा में सदैव ही किसी डोरी के अनुदिश गतिशील तरंग अथवा अनुप्रस्थ तरंग का संदर्भ लिया गया है । अनुदैर्घ्य तरंग में माध्यम के किसी अवयव में तरंग संचरण की दिशा के समांतर विस्थापन होता है । समीकरण (14.2) में किसी अनुदैर्घ्य तरंग के लिए विस्थापन फलन इस प्रकार लिखा जाता है,

$$s(x,\ t) = a \sin(kx - \omega t + \phi) \tag{14.9}$$

यहाँ $s(x, t)$ स्थिति x तथा समय t पर माध्यम के किसी अवयव का तरंग संचरण की दिशा में विस्थापन है। समीकरण (14.9) में a विस्थापन आयाम है। अन्य सभी राशियों के वही अर्थ हैं जो अनुप्रस्थ तरंग के प्रकरण में थे। केवल एक ही अंतर है कि विस्थापन फलन $y(x, t)$ के स्थान पर फलन $s(x, t)$ लिया गया है।

▶ ***उदाहरण 14.2 :*** किसी डोरी के अनुदिश गमन करती तरंग का विवरण इस प्रकार दिया गया है,

$y(x, t) = 0.005 \sin(80.0\, x - 3.0\, t)$

यहाँ आंकिक स्थिरांक SI मात्रकों में हैं (0.005 m, 80.0 rad/m तथा 3.0 rad/s)। तरंग का (a) आयाम, (b) तरंगदैर्घ्य (c) आवर्तकाल एवं आवृत्ति परिकलित कीजिए। दूरी x = 30.0 cm तथा समय t = 20 s पर तरंग का विस्थापन y भी परिकलित कीजिए ।

हल इस विस्थापन की तुलना समीकरण (14.2) से करने पर

$$y(x,\ t) = a \sin(kx - \omega t)$$

हमें निम्नलिखित मान प्राप्त होते हैं,

(a) तरंग का आयाम = 0.005 m = 5 mm

(b) कोणीय तरंग संख्या = 80.0 m^{-1} तथा कोणीय आवृत्ति $\omega = 30\ s^{-1}$

अब हम समीकरण (14.6) के द्वारा तरंगदैर्घ्य λ तथा k में संबंध लिखते हैं

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{80.0\ \text{m}^{-1}} = 7.85\ \text{cm}$$

(c) अब हम नीचे दिए गए T तथा ω में संबंध द्वारा T का मान ज्ञात करते हैं,

$$T = 2\pi/\omega = \frac{2\pi}{3.0\ \text{s}^{-1}} = 2.09\ \text{s}$$

अब चूँकि आवृत्ति $\nu = 1/T$

$= 0.48$ Hz

दूरी x = 30.0 cm तथा समय t = 20 s पर विस्थापन

$$y = 0.005\text{m} \sin(80.0 \times 0.3 - 3.0 \times 20)$$
$$= 0.005\text{m} \sin(-36 + 12\pi) = (0.005\ \text{m}) \sin(1.699)$$
$$= (0.005\ \text{m}) \sin(97°) \simeq 5\ \text{mm}$$ ◀

14.4 प्रगामी तरंग की चाल

किसी प्रगामी तरंग की चाल निरूपित करने के लिए हम तरंग के किसी बिन्दु (किसी कला कोण द्वारा अभिलक्षित) पर ध्यान केंद्रित कर सकते हैं और देखते हैं कि यह बिंदु समय के साथ किस तरह गमन करता है। तरंग के शीर्ष की गति पर ध्यान देना सुविधाजनक होता है। चित्र 14.8 में दो विभिन्न समयों, जिनके बीच Δt का लघु समय अंतराल है, पर तरंग का आकार दर्शाया गया है। समस्त तरंग पैटर्न दाईं ओर (x-अक्ष की धनात्मक दिशा) Δx दूरी चलता है। वास्तव में, बिन्दु (•) द्वारा दर्शाया शीर्ष समय Δt में दूरी Δx चलता है। इस प्रकार तरंग की चाल $\Delta x/\Delta t$ है। किसी अन्य कला वाले बिंदु पर भी हम बिन्दु (•) लगा सकते हैं। यह उसी वेग v से गमन करेगा (अन्यथा तरंग पैटर्न अपरिवर्तित नहीं रहेगा)। तरंग पर किसी निश्चित कला बिंदु की गति को दिया जाता है

$$kx - \omega t = \text{नियतांक} \tag{14.10}$$

अतः जब समय t बदलता है, तो निश्चित कला बिंदु की स्थिति x भी इस प्रकार बदलती है कि कला कोणांक अचर रहे। अतः

$$kx - \omega t = k(x+\Delta x) - \omega(t + \Delta t)$$

या $\quad k\Delta x - \omega\Delta t = 0$

$\Delta x, \Delta t$ का अल्पतम मान लेने पर

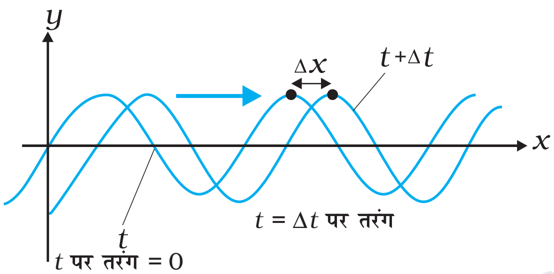
$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v \tag{14.11}$$

ω को T से तथा k को λ से संबंधित करने पर हमें प्राप्त होता है

$$v = \frac{2\pi\omega}{2\pi k} = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T} \tag{14.12}$$

समीकरण (14.12) सभी प्रगामी तरंगों के लिए एक व्यापक संबंध है। यह बताती है कि माध्यम के किसी अवयव के एक

पूर्ण दोलन काल में तरंग पैटर्न एक तरंगदैर्घ्य के बराबर दूरी तय करती है। ध्यान दीजिए कि किसी यांत्रिक तरंग की चाल माध्यम के जड़त्वीय गुणों (डोरी के लिए रैखिक द्रव्यमान घनत्व, सामान्यतया द्रव्यमान घनत्व) तथा प्रत्यास्थ गुणों (रैखिक निकायों के लिए यंग प्रत्यास्थता गुणांक/अपरूपण गुणांक, आयतन प्रत्यास्थता गुणांक) द्वारा निर्धारित होता है। माध्यम चाल निर्धारित करता है। यथा समीकरण (14.2) एक निश्चित चाल के लिए तरंगदैर्घ्य और आवृत्ति का संबंध देता है। वास्तव में, जैसा पहले बताया जा चुका है, माध्यम में अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्घ्य दोनों तरंगें संभव हैं तथा इनकी चाल उसी माध्यम में अलग-अलग होगी। इस अध्याय के अनुवर्ती उपभागों में कुछ माध्य यांत्रिक तरंगों की चाल के लिए हम विशिष्ट व्यंजक प्राप्त करेंगे।



चित्र 14.8 समय t से t+Δt तक किसी आवृत्ति तरंग का गमन, जहाँ Δt लघु समय अंतराल है। तरंग पैटर्न समस्त रूप से दाईं ओर स्थानांतरित हो जाता है। तरंग का शीर्ष (या निश्चित कला वाला कोई और बिंदु) समय Δt में दूरी Δx गमन करता है।

14.4.1 तनित डोरी पर अनुप्रस्थ तरंग की चाल

किसी यांत्रिक तरंग की चाल विक्षोभ के कारण माध्यम में उत्पन्न प्रत्यानयन बल और जड़त्वीय गुणों (द्रव्यमान घनत्व) द्वारा निर्धारित होती है। चाल प्रथम कारक से अनुलोम रूप से तथा दूसरे कारक से प्रतिलोम रूप से संबंधित होती है। किसी डोरी पर तरंग के लिए प्रत्यानयन बल डोरी में तनाव T प्रदान करता है। इस संदर्भ में जड़त्वीय गुण रैखिक द्रव्यमान घनत्व μ है जो डोरी के द्रव्यमान m को उसकी लंबाई l से विभाजित करने पर प्राप्त होता है। न्यूटन के गतिकीय नियमों का उपयोग करके किसी डोरी पर तरंग की चाल के लिए यथार्थ सूत्र प्राप्त किया जा सकता है परन्तु यह उत्पत्ति इस पुस्तक की सीमा के बाहर है। अत: हम विमीय विश्लेषण का उपयोग करेंगे। परन्तु हम यह जान चुके हैं कि केवल विमीय विश्लेषण से यथार्थ सूत्र नहीं प्राप्त हो सकता है। इस विधि से प्राप्त संबंध में स्थिरांक संबंधी अनिश्चितता रहती है। μ की विमा $[ML^{-1}]$ है तथा T की बल की, अर्थात $[MLT^{-2}]$ है। हमें इन विमाओं को इस प्रकार संयोजित करना है कि चाल की विमा $[LT^{-1}]$ प्राप्त हो। हम आसानी से देख सकते हैं कि अनुपात T/μ में यही विमा है

$$\frac{[MLT^{-2}]}{[ML^{-1}]} = [L^2T^{-2}]$$

अत:, यदि T तथा μ ही प्रासंगिक भौतिक राशियाँ हैं तो

$$v = C\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (14.13)$$

जहाँ C विमाहीन स्थिरांक है, जिसे विमीय विश्लेषण द्वारा निर्धारित करना संभव नहीं है । वास्तव में यथार्थ सूत्र में C का मान 1 है। अत: तानित डोरी में अनुप्रस्थ तरंग की चाल

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (14.14)$$

ध्यान दीजिए कि चाल v माध्यम के गुण T और μ (T बाहरी बल के कारण तानित डोरी का अभिलक्षण है) पर तरंग की तरंगदैर्घ्य या आवृत्ति पर स्वत: निर्भर नहीं करती है। आगे की कक्षाओं में आप ऐसी तरंगों के बारे में पढ़ेंगे जिनकी चाल आवृत्ति से स्वतंत्र नहीं है। दो कारकों λ तथा ν उत्पन्न तरंग की आवृत्ति विक्षोभ के स्रोत पर निर्भर करता है। माध्यम में किसी निश्चित चाल तथा आवृत्ति के लिए, समीकरण (14.12) तरंगदैर्घ्य का निर्धारण करता है:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \qquad (14.15)$$

▶ ***उदाहरण 14.3 :*** 0.72 m लंबे किसी स्टील के तार का द्रव्यमान 5.0×10^{-3} kg है । यदि तार पर तनाव 60 N है, तो तार पर अनुप्रस्थ तरंगों की चाल क्या है ?

हल: तार की प्रति एकांक लंबाई का द्रव्यमान

$$\mu = \frac{5.0\times10^{-3}\,\text{kg}}{0.72\ \text{m}}$$

$$= 6.9\times10^{-3}\ \text{kg m}^{-1}$$

तनाव, $T = 60$ N

तार पर अनुप्रस्थ तरंगों की चाल,

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{60\ \text{N}}{6.9\times10^{-3}\,\text{kg m}^{-1}}} = 93\ \text{m s}^{-1}$$ ◀

14.4.2 अनुदैर्घ्य तरंग की चाल – ध्वनि की चाल

किसी अनुदैर्घ्य तरंग में माध्यम के अवयव तरंग संचरण की दिशा में अपनी स्थिति के आगे-पीछे दोलन करते हैं । हम पहले भी देख चुके हैं कि ध्वनि तरंगें वायु के लघु आयतन-अवयवों के संपीडनों तथा विरलनों के रूप में गमन करती हैं । संपीडन विकृति में प्रतिबल का निर्धारण करने वाली प्रत्यास्थ गुणधर्म माध्यम का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक है जिसे इस प्रकार परिभाषित करते हैं,

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} \tag{14.16}$$

यहाँ दाब में परिवर्तन ΔP आयतन विकृति $\Delta V/V$ उत्पन्न करता है। B की विमा वही है जो दाब की है और SI मात्रक में इसे पास्कल (Pa) में व्यक्त करते हैं। तरंग के संचरण के लिए प्रासंगिक जड़त्वीय गुण द्रव्यमान घनत्व ρ है जिसकी विमा $[ML^{-3}]$ है । हम आसानी से देख सकते हैं कि राशि B/ρ में उपेक्षित विमा है :

$$\frac{[M\,L^{-1}\,T^{-2}]}{[M\,L^{-3}]} = [L^2\,T^{-2}] \tag{14.17}$$

अतः, यदि B तथा ρ ही प्रासंगिक भौतिक राशियाँ हैं तो

$$\upsilon = C\sqrt{\frac{B}{\rho}} \tag{14.18}$$

यहाँ C एक स्थिरांक है जिसे विमीय विश्लेषण द्वारा निर्धारित करना संभव नहीं है। यथार्थ उत्पत्ति से C=1 प्राप्त होता है । अतः किसी माध्यम में अनुदैर्घ्य तरंगों की चाल के लिए व्यापक सूत्र है:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \tag{14.19}$$

किसी ठोस छड़ जैसे रैखीय माध्यम के लिए, छड़ में पार्श्वीय प्रसार नगण्य होता है और हमें छड़ को केवल अनुदैर्घ्य विकृति पर विचार करने की आवश्यकता होती है। इस प्रकरण में, प्रासंगिक प्रत्यास्थता गुणांक 'यंग गुणांक' है जिसकी विमा आयतन-प्रत्यास्थता गुणांक की विमा है। इस प्रकरण के लिए विमीय विश्लेषण पहले जैसा है और हमें समीकरण (14.18) जैसी समीकरण प्राप्त होती है जिसमें अनिर्धारित स्थिरांक C होता है जिसका मान यथार्थ उत्पत्ति से 1 प्राप्त होता है। इस प्रकार किसी ठोस छड़ में अनुदैर्घ्य तरंग की चाल निम्नलिखित संबंध द्वारा व्यक्त की जाती है:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \tag{14.20}$$

यहाँ Y छड़ के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक है। सारणी 14.1 में विभिन्न माध्यमों में ध्वनि की चाल दर्शायी गई है।

सारणी 14.1 कुछ माध्यमों में ध्वनि की चाल

माध्यम	चाल (ms^{-1})
गैसें	
वायु (0°C)	331
वायु (20°C)	343
हीलियम	965
हाइड्रोजन	1284
द्रव	
जल (0°C)	1402
जल (20°C)	1482
समुद्र-जल	1522
ठोस	
ऐलुमिनियम	6420
कॉपर (ताँबा)	3560
स्टील	5941
ग्रेनाइट	6000
वल्कनाइज्ड रबर	54

द्रवों तथा ठोसों में ध्वनि की चाल गैसों की तुलना में अधिक है। [ध्यान दें कि ठोसों के प्रकरण में, प्रासंगिक चाल ठोस में अनुदैर्घ्य तरंग की चाल है]। इसका कारण यह है कि द्रवों व ठोसों को गैसों की तुलना में संपीडित करना अधिक कठिन होता है। अतः इनके आयतन प्रत्यास्थता गुणांक के मान अधिक होते हैं। समीकरण (14.19) देखें । ठोसों और द्रवों का गैसों की तुलना में द्रव्यमान घनत्व अधिक होता है । परन्तु उनमें अनुरूपी आयतन प्रत्यास्थता गुणांकों में वृद्धि कहीं अधिक होती है । यही कारण है कि ठोसों और द्रवों में ध्वनी की तीव्र गति होती है ।

किसी गैस में ध्वनि के चाल का आकलन हम आदर्श गैस सन्निकटन में कर सकते हैं। किसी आदर्श गैस (देखें अध्याय 10) के लिए दाब P, आयतन V तथा ताप T के नीचे संबंध इस प्रकार व्यक्त किया जाता है:

$$PV = Nk_BT \tag{14.21}$$

यहाँ N गैस में अणुओं की संख्या, k_B बोल्ट्ज़मान नियतांक तथा T गैस का केल्विन में ताप है । अतः किसी समतापी परिवर्तन के लिए समीकरण (14.21) से हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है

$$V\Delta P + P\Delta V = 0$$

अथवा $$-\frac{\Delta P}{\Delta V/V} = P$$

अतः समीकरण (14.16) में यह मान प्रतिस्थापित करने पर,

$B = P$

अतः समीकरण (14.19) से किसी आदर्श गैस में अनुदैर्ध्य तरंगों की चाल,

$$v = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \qquad (14.22)$$

इस संबंध को सर्वप्रथम न्यूटन ने स्थापित किया था, अतः इसे न्यूटन का सूत्र भी कहते हैं ।

▶ ***उदाहरण 14.4*** न्यूटन के सूत्र का उपयोग करके मानक ताप एवं दाब (STP) पर वायु में ध्वनि की चाल का आकलन कीजिए । वायु के 1 मोल का द्रव्यमान 29.0×10^{-3} kg है ।

हल : हम जानते हैं कि किसी भी गैस के 1 मोल का STP पर आयतन 22.4 लीटर होता है । अतः वायु का STP पर घनत्व

$$\rho_0 = \frac{\text{1 मोल वायु का द्रव्यमान}}{\text{STP पर 1 मोल वायु का आयतन}}$$

$$= \frac{29.0 \times 10^{-3}\,\text{kg}}{22.4 \times 10^{-3}\,\text{m}^3}$$

$= 1.29 \text{ kg m}^{-3}$

किसी माध्यम से ध्वनि की चाल के लिए न्यूटन के सूत्र के अनुसार हमें STP पर वायु में ध्वनि के वेग का निम्नलिखित मान प्राप्त होता है,

$$v = \left[\frac{1.01 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}}{1.29 \text{ kg m}^{-3}}\right]^{1/2} = 280 \text{ m s}^{-1} \qquad (14.23)$$ ◀

समीकरण (14.23) से प्राप्त वायु में ध्वनि की चाल का मान, सारणी 14.1 में दिए गए प्रयोगों द्वारा प्राप्त वायु में ध्वनि की चाल के मान 331 m s^{-1} की तुलना में 15% कम है। आखिर हमसे कहाँ गलती हुई? यदि हम न्यूटन की इस मूल कल्पना का परीक्षण करें जिसमें न्यूटन ने ध्वनि संचरण के समय माध्यम में दाब में होने वाले परिवर्तन को समतापी माना, तो हम यह पाते हैं कि उनकी यह कल्पना सही नहीं थी । लाप्लास ने यह बताया कि ध्वनि संचरण के समय माध्यम में दाब-परिवर्तन इतनी तीव्र गति से होते हैं कि ऊष्मा प्रवाह के लिए ताप को स्थायी बनाए रखने का आवश्यक समय उपलब्ध नहीं हो पाता। फलस्वरूप यह परिवर्तन समतापी नहीं होते वरन् रुद्धोष्म (adiabatic) होते हैं । रुद्धोष्म प्रक्रियाओं के लिए आदर्श गैसों पर निम्न संबंध लागू होता है (खण्ड 11.8 देखें)

PV^{γ} = स्थिरांक

अथवा $\Delta (PV^{\gamma}) = 0$

$P\gamma V^{\gamma-1} \Delta V + V^{\gamma} \Delta P = 0$

यहाँ γ गैस की दो विशिष्ट ऊष्माओं का अनुपात C_p/C_v है ।

इस प्रकार, आदर्श गैस के लिए रुद्धोष्म आयतन प्रत्यास्थता गुणांक

$$B_{ad} = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} = \gamma P$$

अतः वायु में ध्वनि की चाल [समीकरण (14.19)],

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \qquad (14.24)$$

न्यूटन के सूत्र में इस संशुद्धि को **लाप्लास संशोधन** कहते हैं । वायु के लिए $\gamma = 7/5$, अतः अब यदि हम STP पर वायु में ध्वनि की चाल के आकलन के लिए समीकरण (14.24) का प्रयोग करें तो ध्वनि की चाल का मान 331.3 m s^{-1} प्राप्त होता है, जो मापित चाल से मेल खाता है ।

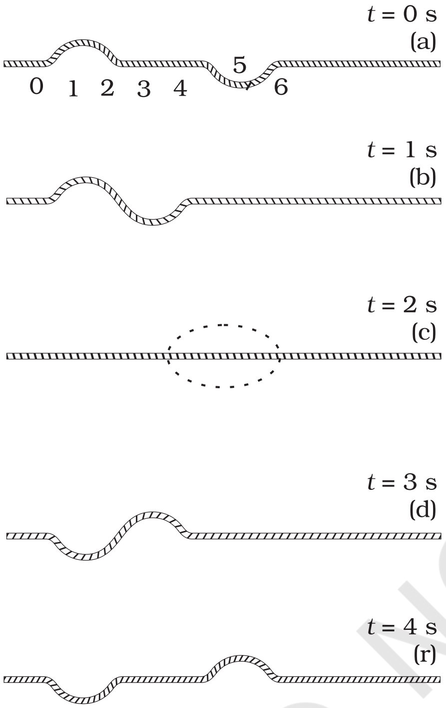
14.5 तरंगों के अध्यारोपण का सिद्धांत

जब विपरीत दिशाओं में गमन करती दो तरंग स्पंद एक दूसरे को पार करते हैं तो क्या होता है (चित्र 14.9)? यह देखा जाता है कि पार करने के बाद भी तरंग स्पंद अपना व्यष्टित्व बनाए रखती है। परंतु, अतिव्यापन के दौरान, तरंग पैटर्न दोनों तरंग स्पंदों से भिन्न होता है। चित्र 14.9 बराबर एवं विपरीत आकारों वाले दो तरंग स्पंदों के एक दूसरे की ओर गमन की स्थिति दर्शाता है। जब स्पंद अतिव्याप्ति होते हैं तो परिणामी विस्थापन पृथक-पृथक स्पंदों के कारण विस्थापनों का बीजगणितीय योग होता है। इस प्रकार जोड़ना तरंगों का **अध्यारोपण का सिद्धांत** कहलाता है। इस सिद्धांत के अनुसार, प्रत्येक स्पंद इस प्रकार गमन करता है मानो दूसरे स्पंद विद्यमान नहीं हैं। अतः माध्यम के अवयव दोनों के कारण विस्थापित होते हैं और चूंकि विस्थापन धनात्मक या ऋणात्मक हो सकते हैं, नेट विस्थापन दोनों विस्थापनो का बीजगणितीय योग होता है। चित्र 14.9 विभिन्न समयों पर तरंग आकार का आलेख दर्शाता है। आलेख (c) में विशेष प्रभाव पर ध्यान दें : दोनों स्पंदों के कारण पृथक-पृथक उत्पन्न विस्थापन एक दूसरे को ठीक से निरस्त कर देते हैं तथा प्रत्येक बिंदु पर कुल विस्थापन शून्य है।

अध्यारोपण के सिद्धांत को गणितीय रूप में व्यक्त करने के लिए, मान लीजिए $y_1(x, t)$ तथा $y_2(x, t)$ माध्यम के किसी

अवयव के विस्थापन हैं, जो यदि तरंग अलग-अलग गमन करती तो उस अवयव के होते। यदि दो तरंगें किसी क्षेत्र में एक साथ पहुंचती हैं और अतिव्यापित होती हैं तो नेट विस्थापन $y(x, t)$ होगा

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \qquad (14.25)$$



चित्र 14.9 *समान एवं विपरीत विस्थापन वाली विपरीत दिशा में गमन करती दो स्पंद। आलेख (c) में दोनों स्पंदों के अतिव्यापन से शून्य विस्थापन होता है।*

यदि किसी माध्यम में एक ही क्षण दो अथवा अधिक तरंगें गमन कर रहीं हैं तो उनका परिणामी तरंग रूप दोनों तरंगों के पृथक-पृथक तरंग फलनों का योग होता है । अर्थात यदि गतिशील तरंगों के तरंग फलन इस प्रकार हैं,

$y_1 = f_1(x - vt)$,

$y_2 = f_2(x - vt)$,

....

....

$y_n = f_n(x - vt)$,

तब माध्यम में विक्षोभ का वर्णन करने वाला तरंग फलन इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$y = f_1(x - vt) + f_2(x - vt) + \ldots\ldots\ldots\ldots + f_n(x - vt)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i(x - vt) \qquad (14.26)$$

अध्यारोपण का सिद्धांत व्यतिकरण की परिघटना का मूल है।

सरलता के लिए, किसी तानित डोरी के अनुदिश गमन करती दो आवर्ती प्रगामी तरंगों पर विचार करिये। दोनों तरंगों की कोणीय आवृत्तियाँ ω समान हैं तथा कोणीय तरंग संख्या k भी समान है। अत: इनके तरंगदैर्घ्य भी समान हैं। इनकी तरंग चाल भी समान होगी। मान लीजिए कि इनके आयाम समान हैं तथा दोनों x-अक्ष के धनात्मक दिशा में गमन करती हैं। इन तरंगों में अन्तर केवल आरंभिक कला में है। समीकरण (14.2) के अनुसार इन दोनों तरंगों को इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$y_1(x, t) = a \sin(kx - \omega t) \qquad (14.27)$$

और $$y_2(x, t) = a \sin(kx - \omega t + \phi) \qquad (14.28)$$

अब अध्यारोपण के सिद्धांत का प्रयोग करने पर, नेट विस्थापन इस प्रकार व्यक्त किया जाता है :

$$y(x, t) = a \sin(kx - \omega t) + a \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (14.29)$$

$$a\left[2\sin\left[\frac{(kx - \omega t) + (kx - \omega t + \phi)}{2}\right]\cos\frac{\phi}{2}\right] \qquad (14.30)$$

यहाँ हमने $(\sin A + \sin B)$ के लिए त्रिकोणमिति के सुपरिचित सूत्र का प्रयोग किया है। अत:

$$y(x, t) = \left[2a\cos\frac{1}{2}\phi\right]\sin\left(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi\right) \quad (14.31)$$

समीकरण (14.31) यह दर्शाता है कि परिणामी तरंग भी, x-अक्ष की धनात्मक दिशा में गमन करती आवर्ती तरंग है जिसकी आवृत्ति तथा तरंगदैर्घ्य दोनों तरंगों के समान है। परन्तु इसका कलान्तर $\phi/2$ है। महत्वपूर्ण तथ्य यह है कि इसका आयाम दोनों घटक तरंगों के बीच कलान्तर ϕ का फलन है :

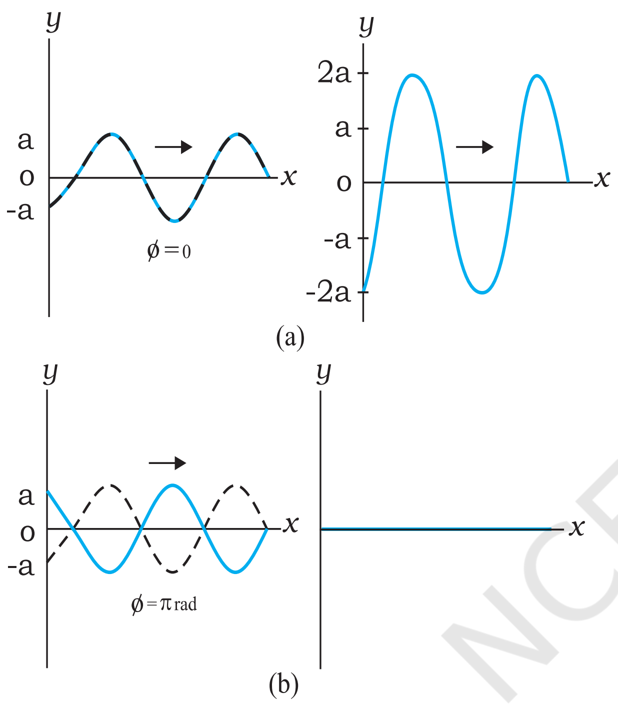
$$A(\phi) = 2a\cos\frac{1}{2}\phi \qquad (14.32)$$

यदि $\phi = 0$, अर्थात् दोनों तरंगें समान कला में हैं,

$$y(x, t) = 2\, a \sin(kx - \omega t) \qquad (14.33)$$

अर्थात् परिणामी तरंग का आयाम $2a$ है, जो A के संभावित मानों में अधिकतम है। $\phi = \pi$ के लिए, दोनों तरंगें पूर्णतः एक दूसरे से विपरीत कलाओं में होती हैं तथा परिणामी तरंग का आयाम सर्वत्र हर क्षण शून्य होता है :

$$y(x, t) = 0 \qquad (14.34)$$



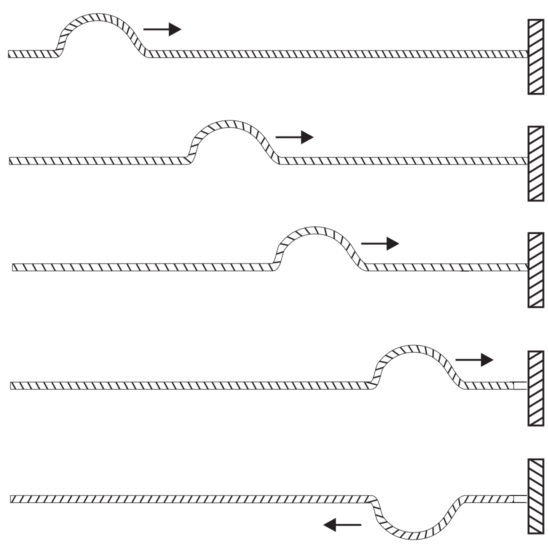
चित्र 14.10 अध्यारोपण के सिद्धांत के अनुसार समान आयाम तथा तरंगदैर्घ्य वाले दो आवृत्ति तरंगों का परिणामी तरंग। परिणामी तरंग का आयाम कलांतर ϕ पर निर्भर करता है। यह कलांतर (a) के लिए शून्य है तथा (b) के लिए π।

समीकरण (14.33) दो तरंगों का संपोषी व्यतिकरण दर्शाता है। इस प्रकरण में दोनों आयाम जुड़ जाते हैं। समीकरण (14.34) दो तरंगों का विनाशी व्यतिकरण दर्शाता है जिसमें परिणामी तरंग में दोनों आयाम का अंतर होता है। चित्र 14.10 व्यतिकरण के इन दोनों प्रकरणों को दर्शाता है जो अध्यारोपण के सिद्धांत का परिणाम है।

14.6 तरंगों का परावर्तन

पिछले अनुभागों में हमने अपरिबद्ध माध्यमों में तरंग संचरण की चर्चा की । क्या होता है जब कोई स्पंद अथवा तरंग किसी परिसीमा का सामना करती है ? यदि परिसीमा दृढ़ है तो स्पंद अथवा तरंग परावर्तित हो जाती है। प्रतिध्वनि की परिघटना दृढ़ परिसीमा से परावर्तन का उदाहरण है। यदि परिसीमा पूर्णतः दृढ़ नहीं है, अथवा वह किन्हीं दो भिन्न प्रत्यास्थ माध्यमों के बीच अंतरापृष्ठ है, तो स्थिति कुछ जटिल हो जाती है। इस स्थिति में आपतित तरंग का कुछ भाग परावर्तित हो जाता है तथा कुछ भाग दूसरे माध्यम में पारगमित हो जाता है। यदि कोई तरंग दो भिन्न माध्यमों की परिसीमा पर तिरछी आपतित होती है तो पारगमित तरंग को **अपवर्तित तरंग** कहते हैं। आपतित एवं अपवर्तित तरंगें स्नेल के अपवर्तन के नियमों का पालन करती हैं, तथा आपतित एवं परावर्तित तरंगें परावर्तन के सामान्य नियमों का पालन करती हैं।

चित्र 14.11 किसी तानित डोरी के अनुदिश गमन करती तथा परिसीमा से परावर्तित होती तरंग दर्शाता है। यदि मान लें कि परिसीमा द्वारा ऊर्जा का कोई अवशोषण नहीं होता है तो परावर्तित तरंग का आकार वही होता है जो आपतित स्पंद का है परंतु परावर्तन से इसके कला में π या 180º का कलांतर उत्पन्न हो जाता है। इसका कारण यह है कि परिसीमा दृढ़ है तथा परिसीमा पर सभी क्षणों पर विक्षोभ का विस्थापन शून्य होना चाहिए। अध्यारोपण के सिद्धांत के अनुसार, यह तभी संभव है जब आपतित एवं परावर्तित तरंगों में π कलांतर हो ताकि परिणामी विस्थापन शून्य हो। यह तर्क दृढ़ दीवार में परिसीमा प्रतिबंध पर आधारित है। इस परिणाम को हम गतिकीय दृष्टि से भी प्राप्त कर सकते हैं। जब स्पंद दीवार पर पहुँचता है तो वह दीवार पर बल आरोपित करता है। न्यूटन के तीसरे नियम के अनुसार दीवार डोरी पर परिणाम में समान तथा दिशा में विपरीत बल आरोपित



चित्र 14.11 किसी दृढ़ परिसीमा से स्पंद का परावर्तन।

करती है। परिणामस्वरूप परावर्तित स्पंद उत्पन्न होता है जिसकी कला में π का अंतर होता है।

इसके विपरीत, यदि परिसीमा बिंदु दृढ़ नहीं है और गति के लिए पूर्ण रूप से स्वतंत्र है (जैसे एक डोरी एक ऐसे छल्ले से बंधी है जो किसी छड़ पर स्वतंत्र रूप से गति कर सके) तो परावर्तित स्पंद की कला तथा आयाम (मान लें ऊर्जा ह्रास न हो) वही हैं जो आपतित स्पंद के हैं। नेट परिसीमा पर अधिकतम विस्थापन तब प्रत्येक स्पंद के आयाम का दो गुना है। अदृढ़ परिसीमा का उदाहरण आर्गन पाइप का खुला सिरा है।

संक्षेप में, किसी प्रगामी तरंग या स्पंद की किसी दृढ़ परिसीमा से परावर्तन में π कलांतर उत्पन्न होता है तथा खुले परिसीमा से परावर्तन में कोई कलांतर उत्पन्न नहीं होता है। इस कथन को गणितीय रूप में व्यक्त करने के लिए, मान लीजिए आपतित तरंग को इस प्रकार निरूपित करते हैं :

$$y_i(x, t) = a \sin(kx - \omega t)$$

तब, दृढ़ परिसीमा से परावर्तन के लिए, परावर्तित तरंग को इस प्रकार निरूपित करते हैं,

$$y_r(x, t) = a \sin(kx + \omega t + \pi)$$

$$= -a \sin(kx + \omega t) \qquad (14.35)$$

किसी खुली परिसीमा से परावर्तन के लिए, परावर्तित तरंग को इस प्रकार निरूपित करते हैं,

$$y_r(x, t) = a \sin(kx + \omega t) \qquad (14.36)$$

स्पष्टतः दृढ़ परिसीमा पर $y = y_i + y_r = 0$ सभी बलों पर।

14.6.1 अप्रगामी तरंगें तथा प्रसामान्य विधाएँ

पिछले अनुभाग में हमने एक सिरे पर परिसीमित निकाय पर विचार किया । परंतु ऐसी कई सुपरिचित स्थितियाँ हैं (जैसे दोनों सिरों पर परिबद्ध डोरी अथवा परिमित लम्बाई का वायु कॉलम) जिसमें परावर्तन दो या अधिक सिरों पर होता है। उदाहरण के लए, किसी डोरी में एक दिशा में गमन करती तरंग एक सिरे से परावर्तित होती है। यह परावर्तित तरंग दूसरी दिशा में गमन करके दूसरे सिरे से परावर्तित होती है। यह प्रक्रिया तब तक चलती रहती है जब तक डोरी में एक अपरिवर्ती तरंग पैटर्न न बन जाय। ऐसे तरंग पैटर्न अप्रगामी तरंगें कहलाते हैं। गणितीय रूप में इसे व्यक्त करने के लिए, x-अक्ष की धनात्मक दिशा में गमन करती किसी तरंग तथा x-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में गमन करती समान आयाम एवं तरंगदैर्घ्य वाली परावर्तित तरंग पर विचार कीजिए। $\phi = 0$ के लिए समीकरण (14.2) और (14.4) से

$$y_1(x, t) = a \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2(x, t) = a \sin(kx + \omega t)$$

तब, अध्यारोपण के सिद्धांत के अनुसार प्राप्त परिणामी तरंग इस प्रकार व्यक्त की जाती है,

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

$$= a[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)]$$

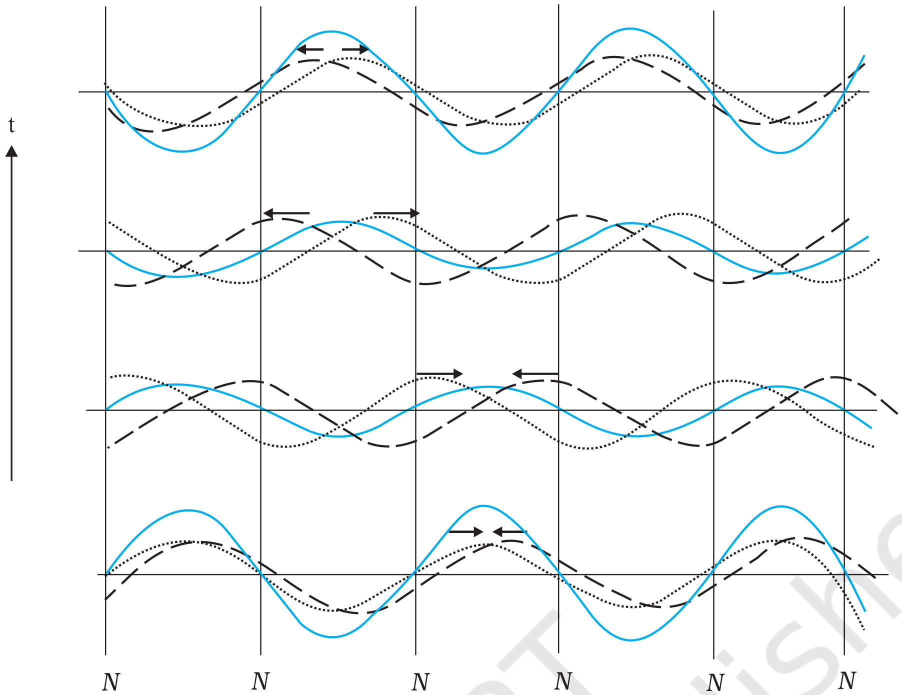
सुपरिचित त्रिकोणमितीय तत्समक

$\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B$, का उपयोग करने पर

$$y(x,t) = 2a \sin kx \cos \omega t \qquad (14.37)$$

समीकरण (14.37) द्वारा निरूपित तरंग पैटर्न तथा समीकरण (14.2) अथवा समीकरण (14.4) द्वारा निरूपित तरंगों के बीच महत्वपूर्ण अंतर पर ध्यान दें। समीकरण (14.37) में पद kx एवं ωt अलग-अलग विद्यमान हैं, न कि $(kx - \omega t)$ के संयोजन के रूप में। इस तरंग का आयाम $2a \sin kx$ है। अतः इस तरंग पैटर्न में, आयाम प्रत्येक बिंदु पर भिन्न होता है परन्तु डोरी का प्रत्येक अवयव समान कोणीय आवृत्ति ω या आवर्त काल से दोलन करता है। तरंग के विभिन्न अवयवों के दोलन में कोई कलांतर नहीं होता है। डोरी पूर्ण रूप से विभिन्न बिंदुओं पर विभिन्न आयामों से एक ही कला में दोलन करती है। तरंग पैटर्न न तो बाईं और और न दाईं ओर गमन करता है। अतः इन्हें अप्रगामी तरंगें कहते हैं। किसी निश्चित स्थिति पर इसका आयाम निश्चित होता है परंतु जैसा पहले बताया गया है विभिन्न स्थितियों पर आयाम भिन्न होता है। जिन बिंदुओं पर आयाम शून्य होता है उन्हें **निस्पंद** कहते हैं तथा जिन बिंदुओं पर अधिकतम होता है उन्हें **प्रस्पंद** कहते हैं। चित्र 14.12 विपरीत दिशाओं में गमन करती दो तरंगों के अध्यारोपण के फलस्वरूप परिणामी अप्रगामी तरंग दर्शाता है।

अप्रगामी तरंगों का सबसे महत्वपूर्ण लक्षण यह है कि निकाय के दोलन की संभावित तरंग दैर्घ्यों या आवृत्तियों के मान, परिसीमा प्रतिबंध के कारण, प्रतिबंधित होते हैं। निकाय किसी स्वेच्छ आवृत्ति से दोलन नहीं कर सकता है (इसकी तुलना आवर्ती प्रगामी तरंग से करें) वरन् इसकी दोलन की आवृत्तियाँ स्वाभाविक आवृत्तियों का एक समुच्चय होती हैं। इन आवृत्तियों को दोलन का **प्रसामान्य विधा** कहते हैं। अब हम दोनों सिरों पर परिबद्ध किसी तानित डोरी के लिए प्रसामान्य विधा का निर्धारण करेंगे।



चित्र 14.12 विपरीत दिशाओं में गमन करती दो आवर्ती तरंगों के अध्यारोपण से उत्पन्न अप्रगामी तरंगें। ध्यान दें कि निस्पंदों (शून्य विस्थापन वाले बिंदु) की स्थिति सभी समयों पर अपरिवर्तित रहती है।

समीकरण (14.37) से निस्पंद की स्थितियों (जहाँ आयाम शून्य होता है) में

$\sin kx = 0$

अर्थात् $kx = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3...$

चूंकि $k = 2\pi/\lambda$ है, अत:

$$x = n\frac{\lambda}{2}, \qquad n = 0, 1, 2, 3... \qquad (14.38)$$

स्पष्टत: दो क्रमागत निस्पंदों के बीच की दूरी $\frac{\lambda}{2}$ होती है। उसी प्रकार स्पंदों की स्थितियों (जहाँ आयाम अधिकतम होते हैं) में $\sin kx$ का मान अधिकतम होता है :

$|\sin kx| = 1$

अर्थात् $kx = (n + \frac{1}{2})\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3...$

$k = 2\pi/\lambda$ लेने पर

$$x = (n + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3... \qquad (14.39)$$

पुन: दो क्रमागत प्रस्पंदों के बीच की दूरी $\lambda/2$ होती है। समीकरण (14.38) का उपयोग दोनों सिरों पर परिबद्ध L लंबाई के तानित डोरी के लिए कर सकते हैं। यदि एक सिरे पर $x = 0$ मान लें तो परिसीमा प्रतिबंध होंगे $x = 0$ तथा $x = L$ पर निस्पंद होंगे। $x = 0$ प्रतिबंध की पहले से संतुष्टि होती है। $x = L$ निस्पंद प्रतिबंध के लिए आवश्यक है कि लंबाई L तरंगदैर्ध्य λ से निम्न प्रकार से संबंधित हो

$$L = n\frac{\lambda}{2}, \qquad n = 1, 2, 3... \qquad (14.40)$$

अत: L लंबाई की डोरी पर सीमित तरंगदैर्ध्य की अप्रगामी तरंगें बन सकती हैं जिनका मान निम्नलिखित संबंध द्वारा प्राप्त किया जाता है,

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \qquad n = 1, 2, 3... \qquad (14.41)$$

तद्नुरूपी आवृत्तियों के मान होंगे

$$\nu = n\frac{v}{2L}, \qquad n = 1, 2, 3... \qquad (14.42)$$

इस प्रकार हमने निकाय के दोलन की स्वाभाविक आवृत्तियाँ अथवा सामान्य विधा निर्धारित कर लिया है। किसी निकाय की न्यूनतम संभावित स्वाभाविक आवृत्ति को निकाय की *मूल विधा* या *प्रथम गुणावृत्ति* कहते हैं। दोनों सिरों पर परिबद्ध L लंबाई के तानित डोरी के लिए $\nu = \frac{v}{2L}$ जो समीकरण (14.42) में

$n=1$ के संगत है। यहाँ υ माध्यम के लक्षणों पर आधारित तरंग की चाल है। $n=2$ की दोलन विधा को द्वितीय गुणावृत्ति कहते हैं। $n=3$ के तदनुरूपी तृतीय गुणावृत्ति होती है और इसी प्रकार अगली गुणावृत्तियाँ होती हैं। इन विधाओं से संबद्ध आवृत्तियों को $\nu_n (n=1, 2, ...)$ द्वारा चिह्नित किया जाता है।

चित्र 14.13 में दोनों सिरों पर परिबद्ध तानित डोरी में प्रथम छः गुणावृत्तियाँ दर्शायी गई हैं।

यह आवश्यक नहीं है कि कोई तानित डोरी इन विधाओं में से किसी विधा में कंपन करे। सामान्यतया किसी डोरी का कंपन विभिन्न विधाओं का अध्यारोपण होता है। कुछ विधाएँ अधिक प्रबलता से उत्तेजित हो सकती हैं और कुछ कम प्रबलता से। सितार व वायलिन जैसे वाद्य यंत्र इस सिद्धांत पर आधारित हैं। कौन सी विधा दूसरी विधा से अधिक उत्तेजित है यह इस बात पर निर्भर करता है कि डोरी को किस बिंदु पर झंकृत किया गया है।

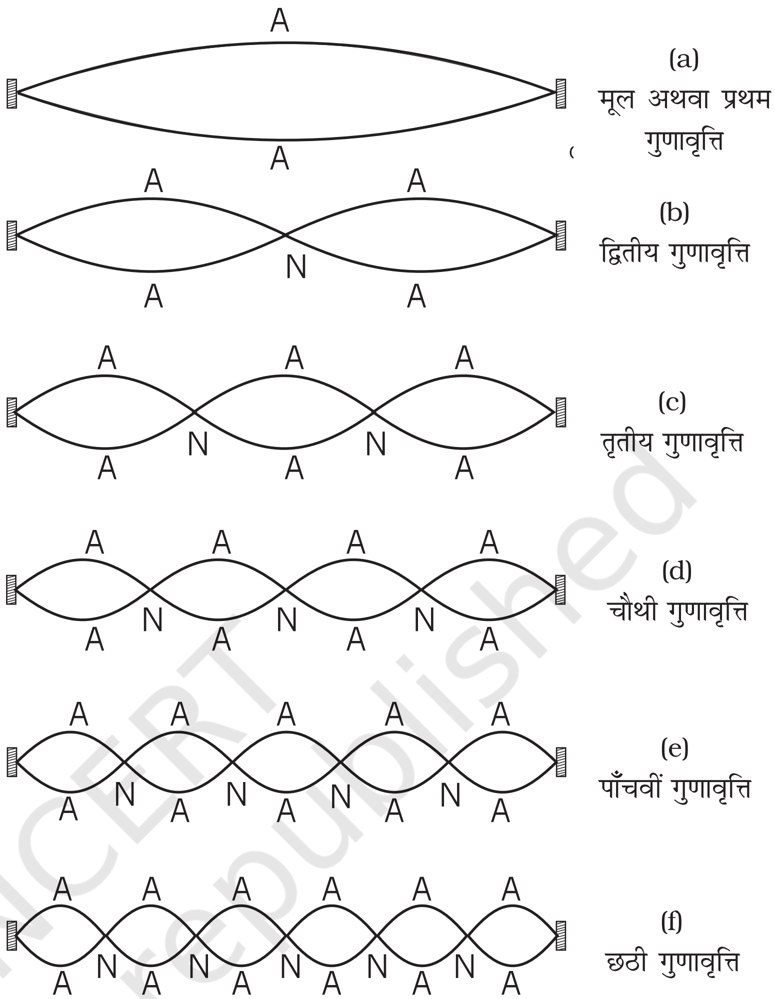
अब हम किसी ऐसे निकाय के कंपनों की विधाओं का अध्ययन करेंगे जिनका एक सिरा बंद है जबकि दूसरा सिरा मुक्त है। अंशतः जल से भरी लम्बी काँच की नलिका का वायु कॉलम ऐसे निकाय का एक उदाहरण है। वायु कॉलम में जल को छूने वाले सिरे पर निस्पंद होता है तथा खुले सिरे पर प्रस्पंद होता है। निस्पंद पर दाब में परिवर्तन अधिकतम होते हैं जबकि विस्थापन न्यूनतम (शून्य) होता है। इसके विपरीत खुले सिरे पर जहाँ प्रस्पंद होते हैं, न्यूनतम दाब परिवर्तन होते हैं तथा विस्थापन का आयाम अधिकतम होता है। जल के संपर्क वाले सिरे को $x=0$ लेने पर निस्पंद प्रतिबंध (समीकरण 14.38) की स्वतः संतुष्टि होती है। यदि दूसरा सिरा $x=L$ प्रस्पंद हो तो समीकरण (14.39) से यह परिणाम निकलता है कि

$$L=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}, \qquad n=0, 1, 2, 3...$$

संभावित तरंगदैर्घ्य निम्नलिखित संबंध से प्रतिबंधित होगी

$$\lambda=\frac{2L}{(n+1/2)}, \quad n=0, 1, 2, 3... \qquad (14.43)$$

निकाय की सामान्य विधाएँ स्वाभाविक आवृत्तियाँ इस प्रकार व्यक्त की जाती हैं :

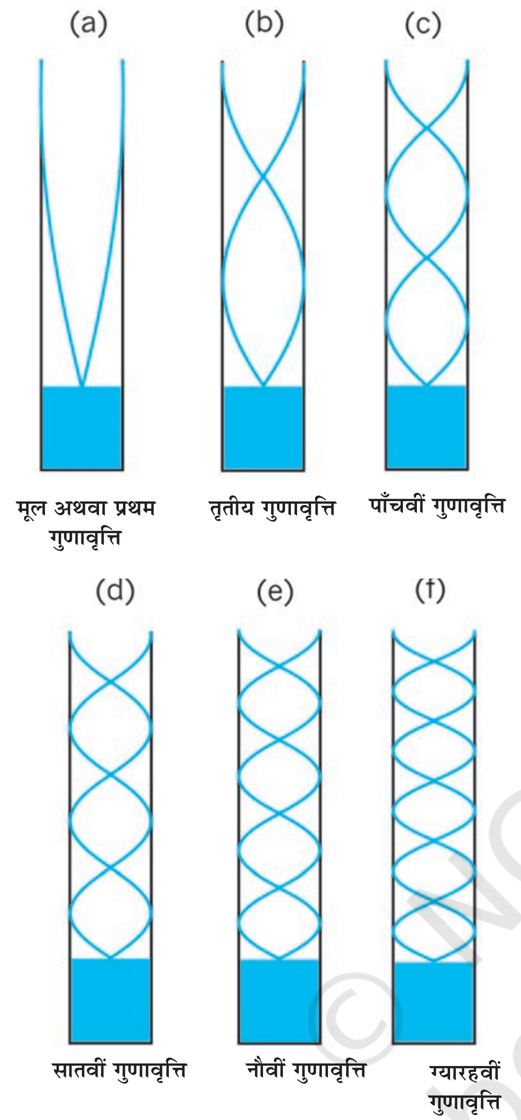


चित्र 14.13 *दोनों सिरों पर परिबद्ध तानित डोरी में दोलन की प्रथम छः गुणावृत्तियाँ।*

$$\nu=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\upsilon}{2L}, \; n=0, 1, 2, 3... \qquad (14.44)$$

मूल विधा $n=0$ के संगत है और यह $\frac{\upsilon}{4L}$ है। अन्य उच्च आवृत्तियाँ मूल आवृत्ति की विषम गुणावृत्तियाँ अर्थात् $3\frac{\upsilon}{4L}$, $5\frac{\upsilon}{4L}$ आदि होती हैं ।

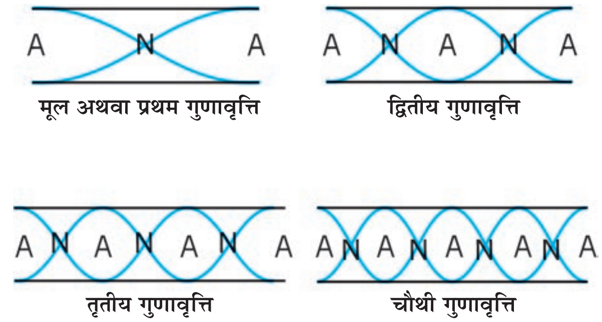
चित्र 14.14 एक सिरे पर खुले तथा दूसरे सिरे पर बंद वायु कॉलम के प्रथम छः विषम गुणावृत्तियाँ दर्शाता है। दोनों सिरों पर खुले पाइप के लिए प्रत्येक सिरे पर प्रस्पंद होता है। इस प्रकार यह स्पष्ट है कि दोनों सिरों पर खुले वायु कॉलम में सभी गुणावृत्तियाँ उत्पन्न होती हैं (देखें चित्र 14.15)। उपरोक्त वर्णित निकायों, डोरी एवं वायु कॉलम में प्रणोदित दोलन (अध्याय 13)



चित्र 14.14 *एक सिरे से खुले तथा दूसरे सिरे पर बंद किसी वायु-कॉलम की कुछ प्रसामान्य विधाएँ। केवल विषम विधाएँ संभव हैं।*

उत्पन्न हो सकते हैं। यदि बाह्य आवृत्ति निकाय की स्वाभाविक आवृत्ति के बराबर होती है तो निकाय में **अनुनाद** उत्पन्न होता है।

किसी पात्र की परिधि से दृढ़तापूर्वक परिबद्ध वृत्ताकार झिल्ली, उदाहरणार्थ, तबले की झिल्ली के कंपनों की प्रसामान्य विधाओं का निर्धारण इस परिसीमा शर्त के द्वारा किया जाता है कि झिल्ली की परिधि पर स्थित कोई भी बिंदु कंपन नहीं करता। इस निकाय के कंपन की प्रसामान्य विधाओं की आवृत्तियों का आकलन अधिक जटिल कार्य है । इस समस्या में दो विमाओं में तरंग संचरण सम्मिलित होता है । फिर भी इसमें अन्तर्निहित भौतिकी वही है ।



चित्र 14.15 *किसी खुले पाइप में अप्रगामी तरंगें । पहली चार गुणावृत्तियाँ दर्शायी गई हैं ।*

▶ **उदाहरण 14.5** दोनों सिरों से खुले किसी पाइप की लंबाई 30.0 cm है । 1.1 kHz आवृत्ति के स्रोत द्वारा इस पाइप की कौन-सी गुणावृत्ति विधा को अनुनाद द्वारा उत्तेजित किया जाता है ? यदि इस पाइप के एक सिरे को बंद कर दिया जाए तो क्या हम फिर भी इसी स्रोत द्वारा अनुनाद सुन सकते हैं ? वायु में ध्वनि की चाल 330 m s^{-1} है ।

हल: खुले पाइप के कंपन की पहली कुछ विधाएँ चित्र 14.15 में दर्शायी गई हैं । पहली गुणावृत्ति की आवृत्ति,

$$\nu_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L} \qquad \text{(खुला पाइप)}$$

यहाँ L पाइप की लंबाई है । n वीं गुणावृत्ति की आवृत्ति

$$\nu_n = \frac{nv}{2L} \quad (n = 1, 2, 3...) \quad \text{(खुला पाइप)}$$

यहाँ $L = 30.0$ cm, $v = 330$ m s^{-1}

$$\nu_n = \frac{n \times 330 \ \ \text{m s}^{-1}}{2 \times 0.3 \ \ \text{m}} = 550n \ \text{s}^{-1}$$

स्पष्ट है कि 1.1 kHz आवृत्ति का स्रोत, अनुनाद द्वारा ν_2 आवृत्ति अर्थात् द्वितीय गुणावृत्ति को उत्तेजित करेगा ।

अब यदि पाइप का एक सिरा बंद है तब समीकरण (14.40) से यह परिणाम निकलता है कि इस पाइप की मूल आवृत्ति,

$$\nu_1 = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{4L} \quad \text{(एक सिरे पर बंद पाइप)}$$

इस पाइप में केवल विषम संख्या की गुणावृत्तियाँ ही विद्यमान होती हैं :

$$\nu_3 = \frac{3v}{4L}, \ \nu_5 = \frac{5v}{4L} \ \text{ तथा इसी प्रकार आगे भी...।}$$

$L = 30$ cm तथा $v = 300$ m s^{-1} के लिए, एक सिरे से बंद पाइप की मूल आवृत्ति 275 Hz है तथा स्रोत की आवृत्ति

चतुर्थ गुणावृत्ति के तदनुरूपी है। चूँकि यह गुणावृत्ति पाइप के कंपन की संभावित विधा नहीं है, अत: इस स्रोत के साथ पाइप का एक सिरा बंद करने पर कोई अनुनाद सुनाई नहीं देगा। ◂

14.7 विस्पंदें

विस्पंद तरंगों के व्यतिकरण से उत्पन्न एक रोचक परिघटना है। जब लगभग सन्निकट आवृत्ति (परंतु बराबर नहीं) वाली दो आवर्त ध्वनि तरंगें एक ही समय सुनाई देती हैं तो हमें समान आवृत्ति (दोनों सन्निकट आवृत्तियों का औसत) सुनाई देता है परन्तु हमें कुछ और भी सुनाई देता है। हमें ध्वनि की तीव्रता में धीरे-धीरे घटाव और बढ़ाव सुनाई देता है जिसकी आवृत्ति दो सन्निकट आवृत्तियों के अंतर के बराबर होती है। संगीतज्ञ इस परिघटना का उपयोग अपने वाद्यों के समस्वरण में करते हैं। वे अपने यंत्र को तब तक समस्वरक करते रहते हैं जब तक उनके सुग्राही कानों को कोई विस्पंद सुनाई न दे।

इस घटना की गणितीय विवेचना के लिए, हम दो लगभग बराबर कोणीय आवृत्तियों ω_1 एवं ω_2 की आवर्ती ध्वनि तरंगों पर विचार करते हैं तथा सुविधा के लिए स्थिति को $x = 0$ मान लें। समीकरण (14.2) में कला का एक समुचित मान ($\phi = \pi/2$ प्रत्येक तरंग के लिए) तथा बराबर आयाम लेने पर हमें प्राप्त होता है:

$$s_1 = a\cos\omega_1 t \text{ तथा } s_2 = a\cos\omega_2 t \qquad (14.45)$$

यहाँ पर हमने प्रतीक y के स्थान पर s का उपयोग किया है क्योंकि हम अनुदैर्ध्य न कि अनुप्रस्थ विस्थापन की बात कर रहे हैं। मान लीजिए कि दोनों आवृत्तियों में ω_1 थोड़ी बड़ी है। अध्यारोपण के सिद्धांत के अनुसार, परिणामी विस्थापन को हम इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$s = s_1 + s_2 = a(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)$$

cos A + cos B के सुपरिचित त्रिकोणमितीय सर्वसमिका का उपयोग करने पर

$$s = 2a\cos\frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}\cos\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \qquad (14.46)$$

यदि हम $\omega_b = \dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ तथा $\omega_a = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ लिखें तब समीकरण (14.46) को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$s = [2\,a\cos\omega_b t]\cos\omega_a t \qquad (14.47)$$

यदि $|\omega_1 - \omega_2| << \omega_1, \omega_2$; $\omega_a >> \omega_b$ है, तब समीकरण (14.47) से निष्कर्ष निकलता है, परिणामी तरंग औसत कोणीय आवृत्ति ω_a से दोलन करता है परन्तु इसका आयाम समय के साथ अचर नहीं है जैसा कि एक शुद्ध आवर्त तरंग के प्रकरण में होता है। जब भी $\cos\omega_b t$ का मान + 1 अथवा –1 होता है आयाम अधिकतम होता है। दूसरे शब्दों में, परिणामी तरंग की तीव्रता में आवृत्ति $2\,\omega_b = \omega_1 - \omega_2$ से उतार-चढ़ाव होता है। चूंकि $\omega = 2\pi\nu$ विस्पंद ν_{beat} को इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$\nu_{beat} = \nu_1 - \nu_2 \qquad (14.48)$$

11 Hz तथा 9 Hz के दो आवृत्ति तरंगों से उत्पन्न विस्पंद की परिघटना चित्र 14.16 दर्शाता है। परिणामी तरंग का आयाम 2Hz की आवृत्ति पर विस्पंद दर्शाता है।

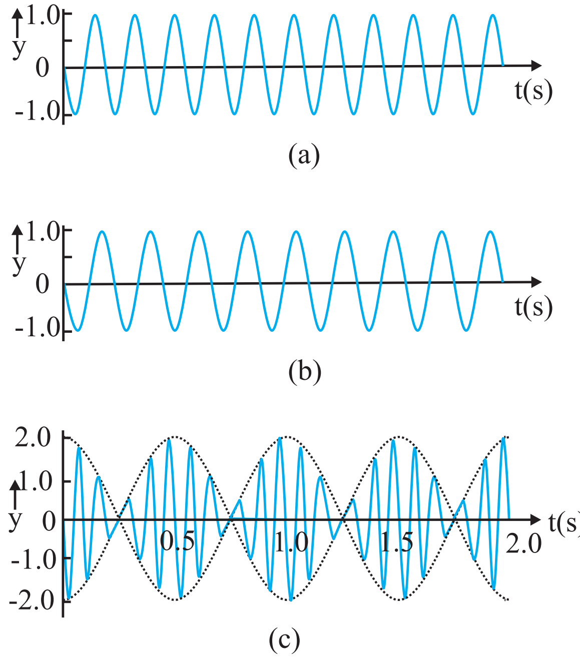
संगीत स्तंभ

मंदिरों में, स्तंभों पर बनी संगीत वाद्य बजाती मानवमूर्तियाँ अक्सर देखने में आती हैं, लेकिन, ये स्तंभ, स्वयं संगीत शायद ही कहीं उत्पन्न करते हों। तमिलनाडु के नेल्ल्याप्पर मंदिर में एकल शिला में उत्कीर्णित ऐसे स्तंभों का समूह है जिनको धीरे से टकटकाने पर, भारतीय शास्त्रीय संगीत के मूल स्वर-सा, रे, गा, मा, पा, धा, नी, सा, उत्पन्न होते हैं। इन स्तंभों के कंपन उनमें इस्तेमाल किए गए पत्थर की प्रत्यास्थता, घनत्व और स्तंभ के आकार पर निर्भर करते हैं।

संगीत स्तंभों को तीन श्रेणियों में बाँटा जा सकता है : पहली श्रेणी में है **श्रुति स्तंभ** जो प्राथमिक स्वर-सरगम उत्पन्न करते हैं, दूसरी श्रेणी है **गण-थूंगल** की जो रागों की मूल धुनें उत्पन्न करते हैं और तीसरी श्रेणी है **लय थूंगल** की, यह वह स्तंभ है जो थाप लगाने पर ताल उत्पन्न करते हैं। नेल्ल्याप्पर मंदिर के स्तंभ श्रुति एवं लय श्रेणी के हैं।

पुरातत्ववेत्ता मानते हैं कि नेल्ल्याप्पर मंदिर पाण्डयन कुल के शासकों द्वारा सातवीं शताब्दी में बनवाये गए थे।

नेल्ल्याप्पर मंदिर तथा दक्षिण भारत में बने कई दूसरे मंदिरों (जैसे हम्पी (देखिये चित्र), कन्याकुमारी और तिरुअनन्तपुरम् के मंदिर) में लगे संगीत-स्तंभ हमारे देश की ही विशिष्टता है और दुनिया के किसी भी भाग में ये नहीं पाए जाते।



चित्र 14.16 (a) 11 Hz आवृत्ति की गुणावृत्ति तरंग का आलेख (b) 9 Hz आवृत्ति की गुणावृत्ति तरंग का आलेख (c) तरंगों (a) तथा (b) का अध्यारोपण से उत्पन्न 2 Hz आवृत्ति का विस्पंद दर्शाता है।

▶ ***उदाहरण 14.6*** दो सितारों की डोरियाँ A तथा B एक साथ 'धा' स्वर बजा रहीं हैं तथा स्वरों में थोड़ा अंतर होने के कारण 5 Hz आवृत्ति के विस्पंद उत्पन्न कर रही हैं। डोरी B के तनाव में कुछ वृद्धि करने पर विस्पंद की आवृत्ति घटकर 3 Hz रह जाती है। यदि A की आवृत्ति 427 Hz है, तो B की मूल आवृत्ति ज्ञात कीजिए।

हल : डोरी में तनाव बढ़ाने पर उसकी कंपन की आवृत्ति बढ़ जाती है। यदि डोरी B की मूल आवृत्ति (ν_B) A की आवृत्ति (ν_A) से अधिक है, तब ν_B में और वृद्धि होने पर विस्पंदों की आवृत्ति बढ़नी चाहिए, परंतु विस्पंद-आवृत्ति में गिरावट पाई गई। अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि $\nu_B < \nu_A$। चूँकि $\nu_A - \nu_B$ = 5Hz, तथा ν_A = 427 Hz, अतः डोरी B की मूल आवृत्ति ν_B = 422 Hz ◀

सारांश

1. *यांत्रिक तरंगें* द्रव्यात्मक माध्यमों में विद्यमान रह सकती हैं तथा ये न्यूटन के गति के नियमों द्वारा संनियमित होती हैं।
2. *अनुप्रस्थ तरंगें* वे तरंगें होती हैं जिनमें माध्यम के कण तरंग संचरण की दिशा के लंबवत् दोलन करते हैं।
3. *अनुदैर्घ्य तरंगें* वे तरंगें होती हैं जिनमें माध्यम के कण तरंग संचरण की दिशा के अनुदिश दोलन करते हैं।
4. *प्रगामी तरंग* वह तरंग होती है जो माध्यम के एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक गमन करती है।
5. धनात्मक x-दिशा में संचरित ज्यावक्रीय तरंग का *विस्थापन* इस प्रकार व्यक्त किया जाता है–

$$y(x, t) = a \sin(kx - \omega t + \phi)$$

   यहाँ a तरंग का आयाम, k कोणीय तरंग संख्या, ω कोणीय आवृत्ति, $(kx - \omega t + \phi)$ कला, तथा ϕ कला-नियतांक अथवा प्रारंभिक कला कोण है।
6. किसी प्रगामी तरंग का तरंगदैर्घ्य λ, उसके किन्हीं ऐसे दो क्रमागत बिंदुओं के बीच की दूरी के बराबर होती है जो किसी क्षण पर समान कला में होते हैं। अप्रगामी तरंगों के लिए यह दो क्रमागत निस्पंदों अथवा प्रस्पंदों के बीच की दूरी के दोगुने के बराबर होती है।
7. किसी तरंग के *आवर्तकाल* T को उस समय द्वारा परिभाषित किया जाता है जिसमें माध्यम का कोई अवयव अपना एक दोलन पूर्ण करता है। यह तरंग की कोणीय आवृत्ति ω से इस प्रकार संबंधित होता है

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

8. किसी तरंग की *आवृत्ति* ν को $1/T$ के रूप में परिभाषित किया जाता है तथा आवृत्ति व कोणीय आवृत्ति में निम्नलिखित संबंध होता है :

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

9. प्रगामी तरंग की *चाल* $\upsilon = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda \nu$

10. किसी तानित डोरी पर *अनुप्रस्थ तरंग की चाल* उस डोरी के गुणों से निर्धारित होती है । यदि किसी डोरी में तनाव T है तथा डोरी का रैखिक द्रव्यमान घनत्व μ है तो उस डोरी में अनुप्रस्थ तरंग की चाल,

$$\upsilon = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

11. *ध्वनि तरंगें* अनुदैर्घ्य यांत्रिक तरंगें होती हैं जो ठोसों, द्रवों तथा गैसों में गमन कर सकती हैं । यदि किसी माध्यम का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक B तथा घनत्व ρ है तो उस माध्यम में ध्वनि तरंगों की चाल

$$\upsilon = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

धातु की छड़ में अनुदैर्घ्य तरंगों की चाल

$$\upsilon = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

किसी गैस में, चूँकि $B = \gamma P$, अत: ध्वनि की चाल

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

यहाँ γ गैस की दो विशिष्ट ऊष्माओं का अनुपात ($\gamma = C_p/C_v$), ρ गैस का घनत्व तथा P गैस का दाब है ।

12. जब दो या अधिक तरंगें किसी माध्यम में एक साथ गमन करती हैं, तब माध्यम के किसी अवयव का विस्थापन प्रत्येक तरंग के विस्थापनों का बीजगणितीय योग होता है । इसे तरंगों के *अध्यारोपण का सिद्धांत* कहते हैं ।

$$y = \sum_{i=1}^{n} f_i\ (x - \upsilon t)$$

13. एक ही डोरी पर गमन करती दो ज्यावक्रीय तरंगें अध्यारोपण के सिद्धांत के अनुसार संकलन अथवा निरसन द्वारा व्यतिकरण की परिघटना प्रदर्शित करती हैं । यदि समान आयाम a तथा समान आवृत्ति वाली परंतु कला में कला-नियतांक ϕ के अंतर वाली दो तरंगें एक ही दिशा में गतिमान हैं तो उनके व्यतिकरण का परिणाम एक एकल तरंग होती हैं जिसकी आवृत्ति भी उनके समान होती है :

$$y(x,t) = \left[2a \cos\frac{1}{2}\phi\right] \sin\left(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi\right)$$

यदि $\phi = 0$ अथवा 2π का पूर्णांक गुणज हो तो तरंगें एकदम समान कला में होती हैं तथा व्यतिकरण संपोषी होता है; यदि $\phi = \pi$ अथवा π रेडियन का विषम गुणज हो तो तरंगें एकदम विपरीत कलाओं में होती है तथा व्यतिकरण विनाशी होता है ।

14. किसी प्रगामी तरंग का किसी दृढ़ परिसीमा अथवा बंद सिरे पर परावर्तन कला-उत्क्रमण के साथ होता है, परंतु किसी खुली परिसीमा पर यह परावर्तन बिना किसी कला-परिवर्तन के होता है ।

किसी आपतित तरंग के लिए

$$y_i\ (x,\ t) = a \sin\ (kx - \omega t)$$

दृढ़ परिसीमा से परावर्तित तरंग के लिए

$$y_r\ (x,\ t) = -\ a \sin\ (kx + \omega t)$$

खुली परिसीमा से परावर्तित तरंग के लिए

$$y_r\ (x,\ t) = a \sin (kx + \omega t)$$

15. विपरीत दिशाओं में गतिशील दो सर्वसम तरंगों के व्यतिकरण से अप्रगामी तरंगें उत्पन्न होती हैं । दोनों सिरों पर परिबद्ध तानित डोरी में उत्पन्न अप्रगामी तरंगों को इस प्रकार व्यक्त किया जाता है

$$y\ (x,\ t) = [2\ a \sin kx] \cos \omega t$$

अप्रगामी तरंगों का एक अभिलक्षण यह है कि इनमें शून्य विस्थापन की निश्चित अवस्थितियाँ जिन्हें निस्पंद कहते हैं तथा अधिकतम विस्थापन की निश्चित अवस्थितियाँ जिन्हें प्रस्पंद कहते हैं, होती हैं । दो क्रमागत निस्पंदों अथवा दो क्रमागत प्रस्पंदों के बीच की दूरी होती है ।

L लंबाई की तानित डोरी जो दोनों सिरों पर परिबद्ध हो, निम्नलिखित आवृत्तियों से कंपन करती है :

$$\nu = n\frac{v}{2L}\ ,\ n = 1, 2, 3....$$

यहाँ v तरंग की डोरी पर गमन की चाल है । इस संबंध से प्राप्त आवृत्तियों को सेट निकाय के कंपन अथवा दोलन की *प्रसामान्य विधाएँ* कहते है । निम्नतम आवृत्ति से दोलन की विधा *मूल विधा* अथवा *प्रथम गुणावृत्ति* कहलाती है । $n = 2$ की दोलन विधा को *द्वितीय गुणावृत्ति* कहते हैं, और इसी प्रकार क्रम बढ़ता जाता है ।

L लंबाई की कोई नली जिसका एक सिरा बंद तथा दूसरा सिरा खुला हो, जैसे वायु-कॉलम, निम्नलिखित आवृत्तियों से कंपन करता है :

$$\nu = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{v}{2L}\ ,\ n = 0, 1, 2, 3....$$

उपरोक्त संबंध द्वारा निरूपित आवृत्तियों का सेट इस प्रकार के निकाय के दोलन की *प्रसामान्य विधाएँ* होती हैं । इस संबंध द्वारा $n = 0$ के लिए प्राप्त निम्नतम आवृत्ति $v/4L$ है, जो इस प्रकार के निकाय की मूल विधा अथवा प्रथम गुणावृत्ति होती है ।

16. दोनों सिरों से परिबद्ध L लंबाई की तानित डोरी अथवा एक सिरे से बंद तथा दूसरे सिरे पर मुक्त अथवा दोनों सिरों पर मुक्त वायु-कॉलम जिन नियत आवृत्तियों से कंपन करते हैं उन्हें इन निकायों की प्रसामान्य विधाएँ कहते हैं । इनमें से प्रत्येक आवृत्ति निकाय की *अनुनाद आवृत्ति* होती है ।

17. *विस्पंद* तब उत्पन्न होते हैं जब बहुत कम अंतर की दो आवृत्तियों ν_1 तथा ν_2 की तरंगें एक साथ संसूचित की जाती हैं। विस्पंद आवृत्ति इस प्रकार व्यक्त की जाती है,

$$\nu_{beat} = \nu_1 \sim \nu_2$$

भौतिक राशि	प्रतीक	विमाएँ	मात्रक	टिप्पणी
तरंगदैर्घ्य	λ	[L]	m	एक ही क्षण पर समान कला के दो क्रमागत बिंदुओं के बीच की दूरी
संचरण नियतांक	k	[L^{-1}]	m^{-1}	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$
तरंग चाल	v	[LT^{-1}]	m s^{-1}	$\nu = v\lambda$
विस्पंद आवृत्ति	ν_{beat}	[T^{-1}]	s^{-1}	दो निकट आवृत्तियों की अध्यारोपित तरंगों की आवृत्तियों का अंतर

विचारणीय विषय

1. तरंग किसी माध्यम में समूचे द्रव्य की गति नहीं है । पवन वायु में ध्वनि तरंग से भिन्न होती है । पवन में एक स्थान से दूसरे स्थान तक वायु की गति सम्मिलित होती है । ध्वनि तरंग में वायु की परतों का संपीडन तथा विरलन सम्मिलित होता है।
2. तरंग में एक स्थान से दूसरे स्थान तक ऊर्जा स्थानांतरित होती है न कि द्रव्य।
3. किसी यांत्रिक तरंग में, माध्यम के निकटतम दोलनी भागों के बीच आद्योपांत (शुरू से अंत तक) प्रत्यास्थ बलों के युग्मन के कारण ऊर्जा स्थानांतरण होता है।
4. अनुप्रस्थ तरंगों का संचरण केवल उन्हीं माध्यमों में हो सकता है जिनमें अपरूपण प्रत्यास्थता गुणांक हो, उदाहरणार्थ ठोस। अनुदैर्घ्य तरंगों को आयतन प्रत्यास्थता गुणांक की आवश्यकता होती है, अत: ये तरंगें सभी माध्यमों-ठोस, द्रव तथा गैस में संभव होती हैं।
5. दी गई आवृत्ति की किसी सरल आवर्त प्रगामी तरंग में सभी कणों का आयाम समान होता है, परंतु किसी दिए गए नियत समय पर उनकी कलाएँ भिन्न होती हैं । किसी अप्रगामी तरंग में किसी निश्चित क्षण पर सभी कणों की कलाएँ समान होती हैं परंतु उनके आयाम भिन्न होते हैं।
6. किसी माध्यम में विराम की स्थिति वाले प्रेक्षक के सापेक्ष उस माध्यम में किसी यांत्रिक तरंग की चाल (v) केवल माध्यम के प्रत्यास्थ तथा अन्य गुणों (जैसे द्रव्यमान घनत्व) पर निर्भर करती है । यह ध्वनि-स्रोत के वेग पर निर्भर नहीं करती।

अभ्यास

14.1 2.50 kg द्रव्यमान की 20 cm लंबी तानित डोरी पर 200 N बल का तनाव है । यदि इस डोरी के एक सिरे को अनुप्रस्थ झटका दिया जाए तो उत्पन्न विक्षोभ कितने समय में दूसरे सिरे तक पहुँचेगा ?

14.2 300 m ऊँची मीनार के शीर्ष से गिराया गया पत्थर मीनार के आधार पर बने तालाब के पानी से टकराता है । यदि वायु में ध्वनि की चाल 340 m s^{-1} है तो पत्थर के टकराने की ध्वनि मीनार के शीर्ष पर पत्थर गिराने के कितनी देर बाद सुनाई देगी ? (g = 9.8 m s^{-2})

14.3 12.0 m लंबे स्टील के तार का द्रव्यमान 2.10 kg है । तार में तनाव कितना होना चाहिए ताकि उस तार पर किसी अनुप्रस्थ तरंग की चाल 20 °C पर शुष्क वायु में ध्वनि की चाल (343 m s^{-1}) के बराबर हो ।

14.4 सूत्र $v = \sqrt{\dfrac{\gamma P}{\rho}}$ का उपयोग करके स्पष्ट कीजिए कि वायु में ध्वनि की चाल क्यों

(a) दाब पर निर्भर नहीं करती,

(b) ताप के साथ बढ़ जाती है, तथा

(c) आर्द्रता के साथ बढ़ जाती है ?

14.5 आपने यह सीखा है कि एक विमा में कोई प्रगामी तरंग फलन $y = f(x, t)$ द्वारा निरूपित की जाती है जिसमें x तथा t को $x - vt$ अथवा $x + vt$ अर्थात् $y = f(x \pm vt)$ संयोजन में प्रकट होना चाहिए । क्या इसका प्रतिलोम भी सत्य है ? नीचे दिए गए y के प्रत्येक फलन का परीक्षण करके यह बताइए कि वह किसी प्रगामी तरंग को निरूपित कर सकता है:

(a) $(x - vt)^2$

(b) $\log [(x+vt)/x_0]$

(c) $1/(x + vt)$

14.6 कोई चमगादड़ वायु में 1000 k Hz आवृत्ति की पराश्रव्य ध्वनि उत्सर्जित करता है । यदि यह ध्वनि जल के पृष्ठ से टकराती है, तो (a) परावर्तित ध्वनि तथा (b) पारगमित ध्वनि की तरंगदैर्घ्य ज्ञात कीजिए । वायु तथा जल में ध्वनि की चाल क्रमश: 340 m s^{-1} तथा 1486 m s^{-1} है ।

14.7 किसी अस्पताल में ऊतकों में ट्यूमरों का पता लगाने के लिए पराश्रव्य स्कैनर का प्रयोग किया जाता है । उस ऊतक में ध्वनि में तरंगदैर्घ्य कितनी है जिसमें ध्वनि की चाल 1.7 k m s^{-1} है ? स्कैनर की प्रचालन आवृत्ति 4.2 MHz है ।

14.8 किसी डोरी पर कोई अनुप्रस्थ गुणावृत्ति तरंग का वर्णन

$$y(x, t) = 3.0 \sin (36\, t + 0.018\, x + \pi/4)$$

द्वारा किया जाता है । यहाँ x तथा y सेंटीमीटर में तथा t सेकंड में है । x की धनात्मक दिशा बाएँ से दाएँ है ।

(a) क्या यह प्रगामी तरंग है अथवा अप्रगामी ? यदि यह प्रगामी तरंग है तो इसकी चाल तथा संचरण की दिशा क्या है ?

(b) इसका आयाम तथा आवृत्ति क्या है ?

(c) उद्‌गम के समय इसकी आरंभिक कला क्या है ?

(d) इस तरंग में दो क्रमागत शिखरों के बीच की न्यूनतम दूरी क्या है ?

14.9 प्रश्न 14.8 में वर्णित तरंग के लिए x = 0 cm, 2 cm तथा 4 cm के लिए विस्थापन (y) और समय (t) के बीच ग्राफ आलेखित कीजिए। इन ग्राफों की आकृति क्या है ? आयाम, आवृत्ति अथवा कला में से किन पहलुओं में प्रगामी तरंग में दोलनी गति एक बिंदु से दूसरे बिंदु पर भिन्न है ?

14.10 प्रगामी गुणावृत्ति तरंग

$y\,(x, t) = 2.0 \cos 2\pi\,(10\,t - 0.0080\,x + 0.35)$

जिसमें x तथा y को m में तथा t को s में लिया गया है, के लिए उन दो दोलनी बिंदुओं के बीच कलांतर कितना है जिनके बीच की दूरी है

(a) 4 m

(b) 0.5 m

(c) $\lambda/2$

(d) $\dfrac{3\lambda}{4}$

14.11 दोनों सिरों पर परिबद्ध किसी तानित डोरी पर अनुप्रस्थ विस्थापन को इस प्रकार व्यक्त किया गया है

$$y(x,\ t) = 0.06 \sin \left(\frac{2\pi}{3}x\right) \cos\,(120\,\pi\,t)$$

जिसमें x तथा y को m तथा t को s में लिया गया है। इसमें डोरी की लंबाई 1.5 m है जिसकी संहति 3.0×10^{-2} kg है। निम्नलिखित का उत्तर दीजिए :

(a) यह फलन प्रगामी तरंग अथवा अप्रगामी तरंग में से किसे निरूपित करता है ?

(b) इसकी व्याख्या विपरीत दिशाओं में गमन करती दो तरंगों के अध्यारोपण के रूप में करते हुए प्रत्येक तरंग की तरंगदैर्घ्य, आवृत्ति तथा चाल ज्ञात कीजिए।

(c) डोरी में तनाव ज्ञात कीजिए।

14.12 (i)प्रश्न 14.11 में वर्णित डोरी पर तरंग के लिए बताइए कि क्या डोरी के सभी बिंदु समान (a) आवृत्ति, (b) कला, (c) आयाम से कंपन करते हैं ? अपने उत्तरों को स्पष्ट कीजिए।

(ii)एक सिरे से 0.375 m दूर के बिंदु का आयाम कितना है ?

14.13 नीचे किसी प्रत्यास्थ तरंग (अनुप्रस्थ अथवा अनुदैर्घ्य) के विस्थापन को निरूपित करने वाले x तथा t के फलन दिए गए हैं। यह बताइए कि इनमें से कौन (i) प्रगामी तरंग को, (ii) अप्रगामी तरंग को, (iii) इनमें से किसी भी तरंग को नहीं निरूपित करता है

(a) $y = 2 \cos (3x) \sin 10\,t$

(b) $y = 2\sqrt{x - v\,\mathrm{t}}$

(c) $y = 3 \sin (5x - 0.5\,t) + 4 \cos (5x - 0.5t)$

(d) $y = \cos x \sin t + \cos 2x \sin 2t$

14.14 दो दृढ़ टेकों के बीच तानित तार अपनी मूल विधा में 45 Hz आवृत्ति से कंपन करता है। इस तार का द्रव्यमान 3.5×10^{-2} kg तथा रैखिक द्रव्यमान घनत्व 4.0×10^{-2} kg m^{-1} है। (a) तार पर अनुप्रस्थ तरंग की चाल क्या है, तथा (b) तार में तनाव कितना है ?

14.15 एक सिरे पर खुली तथा दूसरे सिरे पर चलायमान पिस्टन लगी 1 m लंबी नलिका, किसी नियत आवृत्ति के स्रोत (340 Hz आवृत्ति का स्वरित्र द्विभुज) के साथ, जब नलिका में वायु कॉलम 25.5 cm अथवा 79.3 cm होता है तब अनुनाद दर्शाती है। प्रयोगशाला के ताप पर वायु में ध्वनि की चाल का आकलन कीजिए। कोर-प्रभाव को नगण्य मान सकते हैं।

14.16 100 cm लंबी स्टील-छड़ अपने मध्य बिंदु पर परिबद्ध है। इसके अनुदैर्घ्य कंपनों की मूल आवृत्ति 2.53 kHz है। स्टील में ध्वनि की चाल क्या है?

14.17 20 cm लंबाई के पाइप का एक सिरा बंद है। 430 Hz आवृत्ति के स्रोत द्वारा इस पाइप की कौन-सी गुणावृत्ति विधा अनुनाद द्वारा उत्तेजित की जाती है? यदि इस पाइप के दोनों सिरे खुले हों तो भी क्या यह स्रोत इस पाइप के साथ अनुनाद करेगा? वायु में ध्वनि की चाल 340 m s^{-1} है।

14.18 सितार की दो डोरियाँ A तथा B एक साथ 'गा' स्वर बजा रही हैं तथा थोड़ी-सी बेसुरी होने के कारण 6 Hz आवृत्ति के विस्पंद उत्पन्न कर रही हैं। डोरी A का तनाव कुछ घटाने पर विस्पंद की आवृत्ति घटकर 3 Hz रह जाती है। यदि A की मूल आवृत्ति 324 Hz है तो B की आवृत्ति क्या है?

14.19 स्पष्ट कीजिए क्यों (अथवा कैसे) :

(a) किसी ध्वनि तरंग में विस्थापन निस्पंद दाब प्रस्पंद होता है और विस्थापन प्रस्पंद दाब निस्पंद होता है।

(b) आँख न होने पर भी चमगादड़ अवरोधकों की दूरी, दिशा, प्रकृति तथा आकार सुनिश्चित कर लेते है।

(c) वायलिन तथा सितार के स्वरों की आवृत्तियाँ समान होने पर भी हम दोनों से उत्पन्न स्वरों में भेद कर लेते हैं।

(d) ठोस अनुदैर्घ्य तथा अनुप्रस्थ दोनों प्रकार की तरंगों का पोषण कर सकते हैं जबकि गैसों में केवल अनुदैर्घ्य तरंगें ही संचरित हो सकती हैं, तथा

(e) परिक्षेपी माध्यम में संचरण के समय स्पंद की आकृति विकृत हो जाती है।

अभ्यास तथा अतिरिक्त अभ्यासों के उत्तर

अध्याय 8

8.1 1.8

8.2 (a) दिए गए ग्राफ के अनुसार 150×10^6 N m^{-2} प्रतिबल के लिए विकृति 0.002 है। अत: पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक $= 7.5 \times 10^{10}$ N m^{-2}

(b) पदार्थ की सन्निकट पराभव सामर्थ्य $= 3 \times 10^8$ N m^{-2}

8.3 (a) पदार्थ A

(b) पदार्थ A अधिक तन्य पदार्थ है क्योंकि इसमें प्रत्यास्थता सीमा तथा विभंजन बिंदु के मध्य अप्रत्यास्थ विरूपण पदार्थ B की अपेक्षा अधिक है।

8.4 (a) गलत

(b) सत्य

8.5 1.5×10^{-4} m (स्टील); 1.3×10^{-4} m (पीतल)

8.6 विस्थापन $= 4\times10^{-6}$ m

8.7 2.8×10^{-6}

8.8 0.127

8.9 7.07×10^4 N

8.10 $D_{copper}/D_{iron} = 1.25$

8.11 1.539×10^{-4} m

8.12 2.026×10^9 Pa

8.13 1.034×10^3 kg/m^3

8.14 0.0027

8.15 0.058 cm^3

8.16 2.2×10^6 N/m^2

अध्याय 9

9.3 (a) घटता है, (b) बढ़ती, घटती, (c) अवरूपण विकृति, अवरूपण विकृति की दर (d) द्रव्यमान संरक्षण नियम, बर्नूली के समीकरण से (e) अधिक

9.5 6.2×10^6 Pa

9.6 10.5 m

9.7 समुद्र में उस गहराई पर दाब लगभग 3×10^7 Pa है । यह संरचना उपयुक्त है क्योंकि यह इससे कहीं अधिक प्रतिबल/दाब को सँभाल सकती है ।

9.8 6.92×10^5 Pa

9.9 0.800

9.10 स्पिरिट वाली भुजा में पारे का स्तर ऊपर उठेगा; पारे के स्तरों में अंतर = 0.221 cm

9.11 नहीं, बर्नूली का नियम केवल धारारेखीय प्रवाहों पर ही लागू होता है ।

9.12 नहीं, जिन दो बिंदुओं पर बर्नूली के समीकरण का अनुप्रयोग करना है उनके बीच वायुमंडलीय दाबों में सार्थक अंतर होना चाहिए ।

9.13 9.8×10^2 Pa (रेनल्ड्स संख्या लगभग 0.3 है, अतः प्रवाह स्तरीय है ।)

9.14 1.5×10^3 N

9.15 चित्र (a) सही नहीं है [कारण : संकीर्णन पर (जहाँ नली की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल कम है) द्रव्यमान संरक्षण नियम के कारण प्रवाह की चाल अधिक है । परिणामस्वरूप, बर्नूली के सिद्धांत के अनुसार वहाँ पर दाब कम है । हमने यह परिकल्पना की है कि तरल असंपीड्य है ।]

9.16 0.64 m s^{-1}

9.17 2.5×10^{-2} N m^{-1}

9.18 (b) तथा (c) के लिए 4.5×10^{-2} N अर्थात् ठीक उतना ही जितना (a) में है ।

9.19 दाब-आधिक्य = 310 Pa, कुल दाब = 1.031×10^5 Pa । तथापि, चूंकि प्रश्न में दिया गया आंकड़ा तीन अंकों तक यथार्थ है, हमें बूँद के भीतर कुल दाब को 1.01×10^5 Pa लिखना चाहिए ।

9.20 साबुन के बुलबुले के भीतर दाब-आधिक्य = 20.0 Pa ; साबुन के विलयन में डूबे वायु के बुलबुले के भीतर दाब-आधिक्य = 10.0 Pa । वायु के बुलबुले के लिए बाहर का दाब = $1.01 \times 10^5 + 0.4 \times 10^3 \times 9.8 \times 1.2 = 1.06 \times 10^5$ Pa । दाब आधिक्य इतना कम है कि तीन सार्थक अंकों तक वायु के बुलबुले के भीतर कुल दाब = 1.06×10^5 Pa ।

अध्याय 10

10.1 नियॉन : – 248.58 °C = – 415.44 °F

CO_2 : –56.60 °C = – 69.88 °F [$t_F = \frac{9}{5}t_C + 32$] उपयोग कीजिए ।

10.2 $T_A = \left(\frac{4}{7}\right)T_B$

10.3 384.8 K

10.4 (a) त्रिक बिंदु एक अद्वितीय तापांक होता है; गलन बिंदु तथा क्वथन बिंदु के तापांक दाब पर निर्भर करते हैं; (b) एक अन्य नियत तापांक स्वयं निरपेक्ष शून्य होता है; (c) त्रिक बिंदु 0.01 °C है 0 °C नहीं है; (d) 491.69

10.5 (a) $T_A = 392.69$ K, $T_B = 391.98$ K ; (b) यह विसंगति इसलिए उत्पन्न होती है क्योंकि गैसें पूर्णत: आदर्श गैसें नहीं होतीं। इस विसंगति को कम करने के लिए पाठ्यांक कम से कम दाबों पर लेने चाहिए और मापे गए तापों तथा गैस के त्रिक बिंदु पर परम दाब के बीच खींचे गए आरेख को जबकि दाब शून्य की ओर अग्रसित होता है तो अन्य तापों को प्राप्त करने के लिए बहिर्वेशित (extrapolate) करना चाहिए । इन परिस्थितियों में गैसें आदर्श गैस जैसा व्यवहार करने लग जाती हैं।

10.6 छड़ की 45.0 °C पर वास्तविक लंबाई = 63.0 + 0.0136 = 63.0136 cm (तथापि हमें यह कहना चाहिए कि तीन सार्थक अंकों पर लंबाई में अंतर 0.0136 cm है, परंतु कुल लंबाई तीन सार्थक अंकों तक 63.0 cm ही है । इसी छड़ की 27.0 °C पर लंबाई = 63.0 cm

10.7 जब धुरी को –69 °C तक ठंडा किया जाता है तो पहिया धुरी पर चढ़ता है।

10.8 व्यास में वृद्धि का परिमाण = 1.44×10^{-2} cm

10.9 3.8×10^2 N

10.10 चूंकि संयोजित छड़ के सिरे शिंकजे में जकड़े नहीं हैं अत: दोनों में मुक्त रूप से प्रसार होगा ।

$\Delta l_{\text{पीतल}} = 0.21$ cm ; $\Delta l_{\text{स्टील}} = 0.126$ cm $= 0.13$ cm

लंबाई में कुल परिवर्तन = 0.34 cm । चूंकि छड़ें प्रसार के लिए स्वतंत्र हैं, उनमें कोई तापीय प्रतिबल उत्पन्न नहीं होता।

10.11 $0.0147 = 1.5 \times 10^{-2}$

10.12 103 °C

10.13 1.5 kg

10.14 0.43 J g^{-1} K^{-1} ; कमतर

10.15 गैसें द्विपरमाणुक हैं, तथा स्थानांतरण की स्वातंत्र्य कोटि के अतिरिक्त उनकी अन्य स्वातंत्र्य कोटि (अर्थात् गति की अन्य विधाएँ) भी संभव हैं । गैस के ताप में कुछ वृद्धि के लिए सभी विधाओं की माध्य ऊर्जा में वृद्धि करने के लिए ऊष्मा की आपूर्ति करनी होती है । फलस्वरूप, एक परमाणुक गैसों की तुलना में द्विपरमाणुक गैसों की मोलर विशिष्ट ऊष्मा अधिक होती है । यह दर्शाया जा सकता है कि यदि हम केवल गति की घूर्णी विधा पर ही विचार करें तो द्विपरमाणुक गैसों की मोलर विशिष्ट ऊष्मा (5/2)R होती है जो केवल क्लोरीन को छोड़कर सारणी में दिए गए सभी गैसों के प्रेक्षणों के लिए सत्य है । क्लोरीन की मोलर विशिष्ट ऊष्मा का अधिक मान यह दर्शाता है कि क्लोरीन के अणु में कमरे के ताप पर घूर्णी विधा के अतिरिक्त कंपन विधा भी उपस्थित है ।

10.16 4.3 g/min

10.17 3.7 kg

10.18 238 °C

10.20 9 min

अध्याय 11

11.1 16 g/min

11.2 934 J

11.4 $(2)^{7/5} = 2.64$

11.5 16.9 J

11.6 (a) 0.5 atm (b) शून्य (c) शून्य (गैस को आदर्श मानते हुए) (d) नहीं, चूंकि प्रक्रिया (जिसे मुक्त प्रसार कहते हैं) तीव्र है तथा नियंत्रित नहीं की जा सकती । अंतर अवस्थाएँ साम्य अवस्थाएँ नहीं होतीं तथा गैस समीकरण का पालन नहीं करतीं। कुछ समय के पश्चात् गैस साम्यावस्था में लौट आती है जो उसके *P-V-T* पृष्ठ पर स्थित होती है ।

अध्याय 12

12.1 4×10^{-4}

12.3 (a) बिंदुकित आरेख 'आदर्श' गैस व्यवहार के तदनुरूपी है; (b) $T_1 > T_2$; (c) 0.26 J K^{-1} ; (d) नहीं, 6.3×10^{-5} kg H_2 से समान मान प्राप्त होगा ।

12.4 0.14 kg

12.5 $5.3 \times 10^{-6}\ m^3$

12.6 6.10×10^{26}

12.7 (a) 6.2×10^{-21} J ; (b) 1.24×10^{-19} J ; (c) 2.1×10^{-16} J

12.8 हाँ, आवोगाद्रो नियम के अनुसार । नहीं, तीनों गैसों में सबसे हलकी गैस के लिए v_{rms} सर्वाधिक है; नियॉन ।

12.9 2.52×10^3 K

12.10 माध्य मुक्त पथ के लिए निम्नलिखित सूत्र का उपयोग करिए

$$\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n d^2}$$

यहाँ d अणु का व्यास है । दिए गए ताप तथा दाब के लिए $N/V = 5.0 \times 10^{25}\ m^{-3}$ तथा $\bar{l} = 1.0 \times 10^{-7}$ m ; $v_{rms} = 5.1 \times 10^2\ m\ s^{-1}$

संघट्ट आवृत्ति $= \dfrac{v_{rms}}{\bar{l}} = 5.1 \times 10^9\ s^{-1}$। संघट्ट द्वारा लिया गया समय $= \dfrac{d}{v_{rms}} = 4 \times 10^{-13}$ s । क्रमागत संघट्टों के बीच लिया गया समय $= \dfrac{\bar{l}}{v_{rms}} = 2 \times 10^{-10}$ s । इस प्रकार, क्रमागत संघट्टों के बीच का समय 1 संघट्ट में लगे समय का 500 गुना है । इस प्रकार किसी गैस का कोई अणु अवश्य ही अधिकांश समय मुक्त गति करता है ।

अध्याय 13

13.1 (b), (c)

13.2 (b) तथा (c) सरल आवर्त गति; (a) तथा (d) आवर्ती गति को निरूपित करते हैं परंतु सरल आवर्त गति का निरूपण नहीं करते [किसी बहुपरमाणुक अणु की कई प्राकृतिक आवृत्तियाँ होती हैं; अतः व्यापक रूप में, इसका कंपन विभिन्न आवृत्तियों की कई सरल आवर्त गतियों का अध्यारोपण होता है । यह अध्यारोपण आवर्ती तो होता है, परंतु सरल आवर्त गति नहीं होता]।

13.3 (b) तथा (d) आवर्ती हैं जिनमें प्रत्येक का आवर्तकाल 2 s है; (a) तथा (c) आवर्ती नहीं हैं [ध्यान दीजिए, किसी गति के आवर्ती होने के लिए केवल किसी एक स्थिति की पुनरावृत्ति होना ही पर्याप्त नही होता; एक आवर्तकाल की समस्त गति की क्रमागत पुनरावृत्ति होनी चाहिए] ।

13.4 (a) सरल आवर्त गति, $T = 2\pi/\omega$; (b) आवर्ती, $T = 2\pi/\omega$ परंतु सरल आवर्त गति नहीं; (c) सरल आवर्त गति, $T = \pi/\omega$; (d) आवर्ती, $T = 2\pi/\omega$ परंतु सरल आवर्त गति नहीं; (e) अनावर्ती; (f) अनावर्ती (प्राकृतिक नियमों के अनुसार स्वीकार करने योग्य नहीं क्योंकि जैसे ही $t \to \infty$, फलन $\to \infty$)

13.5 (a) 0, +, + ; (b) 0, –, – ; (c) –, 0, 0 ; (d) –, –, – ; (e) +, +, + ; (f) –, –, –

13.6 (c) सरल आवर्त गति का निरूपण करता है ।

13.7 $A = \sqrt{2}$ cm, $\phi = 7\pi/4$; $B = \sqrt{2}$ cm, $\alpha = \pi/4$

13.8 219 N

13.9 आवृत्ति $= 3.2\ s^{-1}$; द्रव्यमान का अधिकतम त्वरण $= 8.0\ m\ s^{-2}$; द्रव्यमान की अधिकतम चाल $= 0.4\ m\ s^{-1}$

13.10 (a) $x = 2 \sin 20t$ (b) $x = 2 \cos 20t$

(c) $x = -2 \cos 20t$

यहाँ x cm में है । इन फलनों के न तो आयाम में कोई अंतर है, और न ही आवृत्ति में कोई अंतर है । इनकी प्रारंभिक कलाओं में अंतर है ।

13.11 (a) $x = -3 \sin \pi t$, यहाँ x को cm में मापा गया है ।

(b) $x = -2 \cos \pi/2\, t$, यहाँ x को cm में मापा गया है ।

13.13 (a) (a) तथा (b) दोनों के लिए F/k

(b) (a) के लिए $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ तथा (b) के लिए $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$

13.14 100 मीटर/मिनट

13.15 8.4 s

13.16 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + v^4/R^2}}}$; संकेत: क्षैतिज तल में कार्यरत त्रिज्य (अरीय) त्वरण के $\frac{v^2}{R}$ के कारण प्रभावी गुरुत्वीय त्वरण घट जाएगा ।

13.17 साम्यावस्था में, कॉर्क का भार उत्प्लावन बल के बराबर होता है । जब कॉर्क को x दूरी तक नीचे दबाया जाता है, तब उस पर नेट उत्प्लावन बल $Ax\rho_l g$ कार्य करता है । अत: बल स्थिरांक $k = A\rho_l g$ । अब $m = Ah\rho$ तथा $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ का उपयोग करके हम आवश्यक सूत्र प्राप्त कर सकते हैं ।

13.18 जब दोनों सिरे वायुमंडल की ओर खुले हैं तथा दोनों भुजाओं में भरे द्रवों के तलों में अंतर h है, तब द्रव-स्तंभ पर आरोपित नेट बल $Ah\rho g$ है, यहाँ A नली की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल तथा ρ नली में भरे द्रव का घनत्व है । चूंकि प्रत्यानयन बल h के अनुक्रमानुपाती है, अत: गति सरल आवर्त है ।

अध्याय 14

14.1 0.5 s

14.2 8.7 s

14.3 2.06×10^4 N

14.4 आदर्श गैस नियम मान लीजिए : $P = \frac{\rho RT}{M}$

यहाँ ρ गैस का घनत्व M आण्विक द्रव्यमान तथा T ताप है ।

इससे हमें $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ प्राप्त होता है ।

इससे यह प्रदर्शित होता है कि तरंग की चाल v

(a) दाब पर निर्भर नहीं करती।

(b) ताप के साथ $\sqrt{T}$ के अनुसार बढ़ती है ।

(c) जल का आण्विक द्रव्यमान (18), N_2 के आण्विक द्रव्यमान (28) तथा ऑक्सीजन के आण्विक द्रव्यमान (32) से कम है, अत: आर्द्रता में वृद्धि होने पर वायु का आण्विक द्रव्यमान घट जाता है, फलस्वरूप चाल v बढ़ जाती है ।

14.5 इसका विलोम सत्य नहीं है । किसी प्रगामी तरंग के स्वीकार करने योग्य फलन के लिए एक प्रत्यक्ष आवश्यकता यह है कि यह हर समय तथा हर स्थान पर परिमित होनी चाहिए । दिए गए फलनों में से केवल फलन (c) ही इस शर्त को संतुष्ट करता है । शेष फलन संभवतया किसी प्रगामी तरंग को निरूपित नहीं कर सकते ।

14.6 (a) 3.4×10^{-4} m (b) 1.49×10^{-3} m

14.7 4.1×10^{-4} m

14.8 (a) यह प्रगामी तरंग है, जो 20 m s^{-2} चाल से दाएँ से बाएँ गतिशील है ।

(b) 3.0 cm, 5.7 s^{-1} Hz

(c) $\pi/4$

(d) 3.5 m

14.9 सभी ग्राफ ज्यावक्रीय हैं । इन सभी के आयाम तथा आवृत्तियाँ समान हैं, परंतु प्रारंभिक कलाएँ भिन्न हैं।

14.10 (a) 6.4π rad

(b) 0.8π rad

(c) π rad

(d) $(\pi/2)$ rad

14.11 (a) अप्रगामी तरंगें

(b) सभी तरंगों के लिए $l = 3$ m, $n = 60$ Hz तथा $v = 180$ m s^{-1}

(c) 648 N

14.12 (a) निस्पंदों को छोड़कर डोरी के अन्य सभी बिंदुओं की आवृत्ति तथा कला समान हैं, परंतु आयाम समान नहीं हैं।

(b) 0.042 m

14.13 (a) यह फलन अप्रगामी तरंग को निरूपित करता है ।

(b) किसी भी तरंग के लिए स्वीकार करने योग्य फलन नहीं ।

(c) प्रगामी गुणावृत्ति तरंग ।

(d) दो अप्रगामी तरंगों का अध्यारोपण ।

14.14 (a) 79 m s^{-1}

(b) 248 N

14.15 347 m s^{-1}

संकेत : $v_n = \dfrac{(2n-1)v}{4l}$; किसी एक सिरे से बंद पाइप के लिए $n = 1, 2, 3, ...$

14.16 5.06 km s^{-1}

14.17 प्रथम गुणावृत्ति (मूल स्वरक), नहीं

14.18 318 Hz

ग्रंथ सूची

पाठ्यपुस्तकें

इस पुस्तक में जिन विषयों को सम्मिलित किया गया है, उन विषयों के अतिरिक्त अध्ययन के लिए आप निम्नलिखित पुस्तकों में से एक या अधिक पुस्तकें पढ़ना चाहेंगे । यद्यपि इन पुस्तकों में से कुछ उच्च स्तर की हैं और उनमें ऐसे अनेक विषय दिए गये हैं जो इस पुस्तक में नहीं हैं ।

1 **Ordinary Level Physics**, A.F. Abbott, Arnold-Heinemann (1984).

2 **Advanced Level Physics**, M. Nelkon and P. Parker, 6th Edition Arnold-Heinemann (1987).

3 **Advanced Physics**, Tom Duncan, John Murray (2000).

4 **Fundamentals of Physics**, David Halliday, Robert Resnick and Jearl Walker, 7th Edition John Wily (2004).

5 **University Physics**, H.D. Young, M.W. Zemansky and F.W. Sears, Narosa Pub. House (1982).

6 **Problems in Elementary Physics**, B. Bukhovtsa, V. Krivchenkov, G. Myakishev and V. Shalnov, Mir Publishers, (1971).

7 **Lectures on Physics** (3 volumes), R.P. Feynman, Addision – Wesley (1965).

8 **Berkeley Physics Course** (5 volumes) McGraw Hill (1965).

   a. Vol. 1 – Mechanics: (Kittel, Knight and Ruderman)

   b. Vol. 2 – Electricity and Magnetism (E.M. Purcell)

   c. Vol. 3 – Waves and Oscillations (Frank S. Craw-ford)

   d. Vol. 4 – Quantum Physics (Wichmann)

   e. Vol. 5 – Statistical Physics (F. Reif)

9 **Fundamental University Physics**, M. Alonso and E. J. Finn, Addison – Wesley (1967).

10 **College Physics**, R.L. Weber, K.V. Manning, M.W. White and G.A. Weygand, Tata McGraw Hill (1977).

11 **Physics**: **Foundations and Frontiers**, G. Gamow and J.M. Cleveland, Tata McGraw Hill (1978).

12 **Physics for the Inquiring Mind**, E.M. Rogers, Princeton University Press (1960)

13 **PSSC Physics Course**, DC Heath and Co. (1965) Indian Edition, NCERT (1967)

14 **Physics Advanced Level**, Jim Breithampt, Stanley Thornes Publishers (2000).

15 **Physics,** Patrick Fullick, Heinemann (2000).

16 **Conceptual Physics,** Paul G. Hewitt, Addision-Wesley (1998).

17 **College Physics,** Raymond A. Serway and Jerry S. Faughn, Harcourt Brace and Co. (1999).

18 **University Physics,** Harris Benson, John Wiley (1996).

19 **University Physics,** William P. Crummet and Arthur B. Western, Wm.C. Brown (1994).

20 **General Physics,** Morton M. Sternheim and Joseph W. Kane, John Wiley (1988).

21 **Physics,** Hans C. Ohanian, W.W. Norton (1989).
22 **Advanced Physics,** Keith Gibbs, Cambridge University Press (1996).
23 **Understanding Basic Mechanics,** F. Reif, John Wiley (1995).
24 **College Physics,** Jerry D. Wilson and Anthony J. Buffa, Prentice-Hall (1997).
25 **Senior Physics, Part – I,** I.K. Kikoin and A.K. Kikoin, Mir Publishers (1987).
26 **Senior Physics, Part – II,** B. Bekhovtsev, Mir Publishers (1988).
27 **Understanding Physics,** K. Cummings, Patrick J. Cooney, Priscilla W. Laws and Edward F. Redish, John Wiley (2005)
28 **Essentials of Physics,** John D. Cutnell and Kenneth W. Johnson, John wiley (2005)

सामान्य पुस्तकें

विज्ञान के अनुदेशित तथा मनोरंजक सामान्य अध्ययन के लिए आप निम्नलिखित पुस्तकों में से कुछ पुस्तकें पढ़ना चाहेंगे । तथापि ध्यान रखिए, इनमें से कुछ पुस्तकों को लिखने का स्तर आपकी प्रस्तुत पुस्तक के स्तर से काफी उच्च रखा गया है ।

1 **Mr. Tompkins** in paperback, G. Gamow, Cambridge University Press (1967).
2 **The Universe and Dr. Einstein**, C. Barnett, Time Inc. New York (1962).
3 **Thirty years that Shook Physics**, G. Gamow, Double Day, New York (1966).
4 **Surely You're Joking, Mr. Feynman**, R.P. Feynman, Bantam books (1986).
5 **One, Two, Three… Infinity**, G. Gamow, Viking Inc. (1961).
6 **The Meaning of Relativity**, A. Einstein, (Indian Edition) Oxford and IBH Pub. Co (1965).
7 **Atomic Theory and the Description of Nature**, Niels Bohr, Cambridge (1934).
8 **The Physical Principles of Quantum Theory**, W. Heisenberg, University of Chicago Press (1930).
9 **The Physics- Astronomy Frontier**, F. Hoyle and J.V. Narlikar, W.H. Freeman (1980).
10 **The Flying Circus of Physics with Answer**, J. Walker, John Wiley and Sons (1977).
11 **Physics for Everyone** (series), L.D. Landau and A.I. Kitaigorodski, Mir Publisher (1978).
Book 1: Physical Bodies
Book 2: Molecules
Book 3: Electrons
Book 4: Photons and Nuclei.
12 **Physics can be Fun**, Y. Perelman, Mir Publishers (1986).
13 **Power of Ten**, Philip Morrison and Eames, W.H. Freeman (1985).
14 **Physics in your Kitchen Lab**., I.K. Kikoin, MIR Publishers (1985).
15 **How Things Work : The Physics of Everyday Life**, Louis A. Bloomfield, John Wiley (2005)
16 **Physics Matters : An Introduction to Conceptual Physics,** James Trefil and Robert M. Hazen, John Wiley (2004).

पारिभाषिक शब्दावली

ढाँचा	Framework	गुणात्मक	Qualitative
यांत्रिकी	Mechanics	मात्रात्मक	Quantitative
परमाण्विक	Atomic	पूर्वानुमान	Prediction
आण्विक	Molecular	प्रतिरूपण	Modelling
प्रकाश वैद्युत प्रभाव	Photo electric effect	सत्यापन	Verification
क्वांटम	Quantum	परिकल्पना	Speculation
प्रतिकण	Antiparticle	अटकलबाजी	Conjecture
विषय	Discipline	यथार्थता	Accuracy
प्रति-इलेक्ट्रॉन	Anti-electron	परिशुद्धता	Precision
एकीकरण	Unification	दीर्घवृत्तीय	Elliptical
न्यूनीकरण	Reduction	सूर्य-केंद्रीय	Heliocentric
अवयव	Constituent	ग्रहीय	Planetary
स्थूल	Macroscopic	कक्षा	Orbit
धारणा, संकल्पना	Concept	प्रकीर्णन	Scattering
सार्वत्रिक	Universal	पारस्परिक क्रिया	Interplay
प्रभावक्षेत्र	Domain	खगोलीय	Astronomical
गुरुत्वाकर्षण	Gravitation	विघटनाभिक, रेडियोऐक्टिव	Radioactive
वैद्युत चुंबक	Electromagnet	नाभिक	Nucleus
अणुगति सिद्धांत	Kinetic theory	नाभिकीय संलयन	Nuclear fusion
सांख्यिकीय यांत्रिकी	Statistical mechanics	नाभिकीय विखंडन	Nuclear fission
ताप	Temperature	शृंखला अभिक्रिया	Chain reaction
औसत	Average	बंधन ऊर्जा	Binding energy
माध्य	Mean	विलोपन	Annihilation
पार्थिव	Terrestrial	चिरसम्मत भौतिकी	Classical Physics
आकाशीय पिंड	Celestial Object	संतुलन, साम्यावस्था	Equilibrium
ग्रहण	Eclipse	वैद्युतगतिकी, विद्युत्-गतिकी	Electrodynamics
ज्वारभाटा	Tide	प्रकाशिकी	Optics
ज्वालामुखी	Volcano	ऊष्मागतिकी	Thermodynamics
इन्द्रधनुष	Rainbow	चुंबकीय क्षेत्र	Magnetic field
परिघटना	Phenomena	निकाय	System
अन्योन्य क्रिया	Interaction	आयनमंडल	Ionosphere
प्रौद्योगिकी	Technology	दक्षता	Efficiency
प्रेक्षण	Observation	परास	Range

दृढ़ पिंड	Rigid body
विद्युत्वाही चालक	Current carrying conductor
मूल कण	Elementary particles
वायु प्रतिरोध	Air resistance
निर्वातित	Evacuated
मुक्त पतन	Free fall
आकाशगंगा	Galaxy
विश्व	Universe
भौतिक राशि	Physical quantity
अनुप्रयुक्त भौतिकी	Applied Physics
मापन	Measurement
सन्निकटन	Approximation
त्वरण	Acceleration
गुरुत्वीय त्वरण	Acceleration due to gravity
प्रतिरोध	Resistance
संचार	Communication
अनुप्रयोग	Applications
आण्विक शस्त्र	Nuclear Weapon
आण्विक शक्ति रिएक्टर	Nuclear power reactor
न्यूट्रॉन-प्रेरित विखंडन	Neutron induced fission
वैकल्पिक ऊर्जा स्रोत	Alternative energy source
जीवाश्मी ईंधन	Fossil fuel
सौर ऊर्जा	Solar energy
भूतापीय ऊर्जा	Geothermal energy
आनुवंशिक अभियांत्रिकी	Genetic engineering
आघात	Impact
चक्रदोला (गोल चक्र)	Merry go round
पेशीय बल	Muscular force
स्पर्शीय बल	Contact force
घर्षण	Friction
कमानी	spring
तनाव	tension
उत्प्लावकता	buoyancy
श्यानता	Viscous force
पृष्ठ तनाव	Surface tension
सूक्ष्म प्रभाव क्षेत्र	Microscopic domain
अंतराण्विक	Intermolecular
अंतरपरमाण्विक	Interatomic
मूल बल	Fundamental force
प्रत्यास्थ बल	Elastic force
व्युत्पन्न बल	Derived force
आनुभविक नियम	Empirical law
अनुक्रमानुपाती	Directly proportional
व्युत्क्रमानुपाती	Inversely proportional
कृत्रिम उपग्रह	Artificial satellites
मंदाकिनीय गुच्छे	Galactic cluster
विजातीय आवेश	Unlike charges
सजातीय आवेश	Like charges
प्रतिकर्षण बल	Repulsive force
आवेशयुक्त संघटन	Charged constituents
तात्क्षणिक	Instantaneous
अभिलंबवत्	Normally
ऊर्ध्वाधर	Vertical
लंबवत्	Perpendicularly
क्षैतिज	Horizontal
माध्यम	Medium
गतिकी	Dynamics
तरंग सिद्धांत	Wave theory
विकिरण	Radiation
ब्राउनी गति	Brownian motion
आपेक्षिकता का विशिष्ट सिद्धांत	Special theory of relativity
भौतिकविद्	Physicist
द्रव्यमान-ऊर्जा तुल्यता	Mass-energy equivalence
आपेक्षिकता का व्यापक सिद्धांत	General theory of relativity
उद्दीपित उत्सर्जन	Stimulated emission
कृष्णिका	Black body
ब्रह्मांडिकी	Cosmology
स्थूल बोसॉन	Massive boson
क्रांतिक	Critical
उदासीन	Neutral
निरस्त	Cancel
आंतरिक	Intrinsic
उत्सर्जित, निर्गत	Emitted
बोस-आइंस्टाइन सांख्यिकी	Bose-Einstein Statistics
फर्मी-डिरॉक सांख्यिकी	Fermi-Dirac Statistics
मैक्सवैल-बोल्ट्ज़मान सांख्यिकी	Maxwell-Boltzamann Statistics
पाउली अपवर्जन सिद्धांत	Pauli exclusion principle
प्रचक्रण	Spin
अर्धपूर्णांक	Half integer
उच्च ऊर्जा संघट्ट	High energy collision
नाभिकीय प्रक्रिया	Nuclear process
क्षय	Decay
विनिमय	Exchange
संवेग	Momentum
आवेग	Impulse

संरक्षण	Conservation
प्रतिक्षेप	Recoil
अनंत	Infinity
यांत्रिक ऊर्जा	Mechanical energy
गतिज ऊर्जा	Kinetic energy
स्थितिज ऊर्जा	Potential energy
वियुक्त निकाय	Isolated system
ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम	First law of thermodynamics
रूपांतरण	transformation
अभिकारक	Reactant
उत्पाद	Product
अविनाशी	Indestructible
पुनर्व्यवस्था	Rearrangement
ऊष्माक्षेपी	Exothermic
ऊष्माशोषी	Endothermic
द्रव्यमान-क्षति	Mass defect
आंकिक रूप से	Numerically
अदिश	Scalar
सदिश	Vector
रैखिक	Linear
कोणीय	Angular
समता	Parity
विचित्रता	Strangeness
अस्तित्व	Existence
सममिति	Symmetry
समरूप	Identical
स्थानांतरीय	Translational
विस्थापन	Displacement
दिक्काल	Space and time
समदैशिकता	Isotropy
अमूर्त	Abstract
मूर्त	Concrete
मूल मात्रक	Fundamental unit
व्युत्पन्न मात्रक	Derived unit
गुणज (अपवर्त्य)	Multiples
अपवर्तक	Submultiples
पूर्वलग्न	Prefix
ऊष्मागतिक ताप	Thermodynamic temperature
स्वेच्छगृहीत	Arbitraily chosen
लंबन, पैरेलैक्स	Parallax
कोणीय व्यास	Angular diameter
अंतर्ग्रह	Inferior planets
प्रसर कोण	Elongation
खगोलीय मात्रक	Astronomical unit
संसूचक	Detector
संग्रहण	Reception
प्रतिध्वनि	Echo
बाह्य ग्रह	Exterior planets
अर्धदीर्घ अक्ष	Semi major axis
कक्षीय अवधि	Orbital period
विभेदन	Resolution
पुंज	Beam
सुरंगन सूक्ष्मदर्शिका	Tunnelling microscopy
एकीकृत परामाण्वीय द्रव्यमान (संहति) मात्रक	Unified atomic mass unit
जड़त्वीय द्रव्यमान	Inertial mass
गुरुत्वीय द्रव्यमान	Gravitational mass
सार्थक अंक	Significant figures
विमीय सूत्र	Dimensional formulae
विमीय समीकरण	Dimensional equation
यादृच्छिक त्रुटियाँ	Random errors
अल्पतमांक त्रुटियाँ	Least count error
सुबाह्य	Portable
परिक्रमा, परिक्रमण	Revolution
पथ लंबाई	Path length
संपाती	Coincide
मूल बिंदु	Origin
परिमाण	Magnitude
दिशा	Direction
सरल रेखीय गति	Rectilinear motion
एक-विमीय गति	One dimensional motion
पश्चगामी	Backward
अग्रवर्ती	Forward
ऊर्ध्वगामी, उपरिमुखी	Upward
अधोगामी, अधोमुखी	Downward
तद्नुरूप	Corresponding
औसत वेग	Average velocity
औसत चाल	Average speed
मानक अंकन	Standard notation
प्रवणता	Slope
तात्क्षणिक वेग	Instanteneous velocity
अनंतः सूक्ष्म	Infinitesimally small
संबद्ध	Connecting

अवकल गणित	Differential calculus
अवकल गुणांक	Differential coefficient
स्पर्श रेखा	Tangent
सीमांत प्रक्रिया	Limiting process
आंकड़े	Data
यथार्थ व्यंजक	Exact expression
समय का फलन	Function of time
नत समतल	Inclined plane
तात्क्षणिक त्वरण	Instantaneous acceleration
औसत त्वरण	Average acceleration
रोचक लक्षण	Interesting feature
निष्कोण	Smooth
अंकीय औसत	Arithmetic average
विषम अंक	Odd number
क्रमिक अंतराल	Successive interval of time
रोधन दूरी	Stopping distance
ब्रेकिंग दूरियाँ	Braking distances
प्रतिक्रिया काल	Reaction time
उभयनिष्ठ	Common point
परवलय	Parabola
बीजगणित	Algebra
दहन उत्पाद	Products of combustion
नियत दिशा	Constant direction
स्थिर लिफ्ट	Stationary lift
प्रेक्षक	Observer
शुद्ध गतिक	Kinematic
शुद्ध गतिकी	Kinematics
घूर्णन	Rotation
आलेखी विधि	Graphical Method
विश्लेषणात्मक विधि	Analytical method
अदिश गुणनफल	Scalar Product or dot product
सदिश गुणनफल	Vector-product or cross product
प्रक्षेप्य	Projectile
एकसमान वृत्तीय गति	Uniform circular motion
दिशात्मक दृष्टिकोण	Directional aspect
दिक्स्थान	Space
समतल	Plane
परिमाप	Perimeter
परम मान	Absolute value
सदिशों का योग संबंधी-त्रिभुज का नियम	Triangle law of vector-addition
सदिशों का योग संबंधी चतुर्भुज का नियम	Parallelogram law of vector-addition
"शीर्ष एवं पुच्छ" नियम	"Head and Tail" rule
स्थिति सदिश	Position vector
विस्थापन सदिश	Displacement vector
वेग सदिश	Velocity vector
त्वरण सदिश	Acceleration vector
एकांक सदिश	Unit vectors
सदिशों के जोड़ का साहचर्य नियम	Associative law of vector-addition
क्रम-विनिमेय नियम	Commutative law
वितरण का नियम	Distributive law
संपाती	Coincide
समतुल्यता	Equality
शून्येतर	Non-zero
दक्षिणावर्ती नियम	Right hand rule
त्रिकोणमिति	Trigonometry
निर्देशांक	Co-ordinates
उन्नयन कोण	Angle of elevation
अवनमन कोण	Angle of declination
व्यंजक	Expression
ज्या-नियम	Law of sine
कोज्या-नियम	Law of cosine
त्रिज्यीय	Radial
निर्देश-तंत्र	Frame of reference
फलन	Function
समकालिक	Simultaneous
उड्डयन काल	Time of flight
चट्टान	Cliff
अभिकेंद्र बल	Centripetal force
अभिकेंद्र त्वरण	Centripetal acceleration
आवर्त काल	Time period
आवृत्ति	Frequency
कोणीय चाल	Angular speed
खाँचा	Groove
अध्यारोपण	Superposition
गुरुत्वीय विभव	Gravitational potential
भ्रामकता	Fallacy
संवेग संरक्षण	Conservation of momentum
साम्यावस्था	Equilibrium
जड़त्वीय फ्रेम	Inertial frame
छद्म बल	Pseudo-force

परिवर्ती	Variable
आनत तल	Inclined plane
अरस्तू	Aristotle
युगांतरीय	Epochal
सार्वभौमिक	Universal
नेट	Net
संघट्ट, टक्कर	Collision
जड़त्व	Inertia
आघूर्ण	Moment
आंतरिक बल	Internal force
सौर परिवार	Solar system
उपग्रह	Satellite
विरूपण	Deformation
युग्म	Pair
अंतरातारकीय	Interstellar space
क्षणिक, क्षण	Instant
प्रत्यास्थ	Elastic
अप्रत्यास्थ	Inelastic
गतिक प्रतिक्रिया	Kinetic reaction
गतिज घर्षण	Kinetic friction
विलगित, वियुक्त, पृथक	Isolated
बहुभुज	Polygon
प्रतिक्षेप, प्रतिक्षिप्त	Recoil
कुंडलित कमानी	Coiled Spring
उत्प्लावन, उत्प्लावकता	Buoyancy
उत्प्लावन बल	Buoyant force
संपीडन	Compression
प्रत्यानयन बल	Restoring force
प्रसर कोण दैर्घ्यवृद्धि	Elongation
श्यान बल	Viscous force
कमानी बल	Spring force
विन्यास, संरूपण	Configuration
अवितान्य	Inextensible
सूक्ष्म, सूक्ष्मदर्शनीय, सूक्ष्मदर्शीय	Microscopic
स्थैतिक घर्षण	Static friction
समुपस्थित गति	Impending motion
गतिक घर्षण	Dynamic friction
सर्पी घर्षण	Sliding friction
सीमांत मान	Limiting value
लोटनिक घर्षण	Rolling friction
बॉल-बेयरिंग	Ball-bearing
स्नेहक	Lubricant
स्नेहन	Lubrication
त्वरित फ्रेम	Accelerated frame
कोरिऑलिस बल	Coriolis force
निरपेक्ष विराम	Absolute rest
तुल्यता	Equivalence
प्रणोद	Thrust
दहनशील गैस	Combustion gas
निष्कासित गैस	Ejected gas
बल निर्देशक आरेख	Free body diagram
व्यापकीकरण	Generalisation
संकुचन	Contraction
आंतरिक ऊर्जा	Internal energy
असंरक्षी	Non-conservative
प्रक्षेप पथ	Trajectory
संरूपण	Configuration
मंदक	Moderator
प्रतिक्षेपहीन उत्सर्जन	Recoilless emission
जालक (लैटिस)	Lattice
कोणीय संवेग	Angular momentum
वामावर्त	Anticlockwise
कोणीय त्वरण	Angular acceleration
क्षेत्रीय वेग	Areal velocity
सममित अक्ष	Axis of symmetry
द्विअंगी निकाय	Binary system
दक्षिणावर्त	Clockwise
बलयुग्म	Couple
केंद्रक	Centroid
आलंब	Fulcrum
गतिपालक चक्र	Fly wheel
पटल	Lamina
उत्तोलक-भुजा	Lever arm
संपर्क रेखा	Line of contact
जड़त्वाघूर्ण	Moment of inertia
अभिविन्यास	Orientation
दृढ़ वस्तु	Rigid body
परिभ्रमण त्रिज्या	Radius of gyration
घूर्णीय गतिज ऊर्जा	Rotational kinetic energy
बल आघूर्ण	Torque
प्रमेय	Theorem
तनाव	Tension
स्पर्श रेखीय	Tangential
अक्षीय घूर्णन	Axial rotation
ऊँचाई	Altitude

कृत्रिम	Artificial	असार्थक	Inaccurate
शिलाखंड, खंडाश्य	Boulder	तरल यांत्रिकी	Machanics of fluids
कृष्ण विवर	Black hole	वृहदणु	Macromolecule
कृष्णिका	Black body	अंतर्परिक्षिप्त	Inter-dispersed
रसभरी	Berry	अक्रिस्टलीय	Amorphous
बंधन ऊर्जा	Binding energy	क्रिस्टलाणु	Crystallite
तारामंडल	Constellations	अंश क्रिस्टलीय ठोस	Semi-crystalline solid
निर्देशांक निकाय	Coordinate system	विकृति (अपरूपण)	Strain
केंद्राभिमुखी	Centripetal	उभयनिष्ठ	Common to two
संप्रेषण	Communication	सर्वनिष्ठ	Common to all
आंकड़े	Data base	चित्रांकन	Picturisation
अधिचक्र	Epicycle	परीक्षण निदर्श (प्रादर्श)	Experimental sample
दीर्घवृत्त	Ellipse	भंगुर	Brittle
भूमध्यवर्ती उभार	Equational bulge	पराभव बिंदु	Yield point
पलायन चाल	Escape speed	पराभव सामर्थ्य	Yield strength
लिफ्ट	Elevator	चरम सामर्थ्य	Ultimate strength
नाभि	Foci	तनन सामर्थ्य	Tensile strength
भूकेंद्री	Geocentric	आघातवर्ध्य	Ductile
भूस्थैतिक	Geostationary	सुघट्य क्षेत्र	Plastic region
भूसमकालिक	Geosynchronous	प्रत्यास्थ शैथिल्य	Elastic hysteresis
अर्धगोलीय	Hemisphere	क्रियात्मक	Operational
अतिपरिवलय	Hyperbola	व्यावर्तन (ऐंठन)	Twist
तादम्य	Identity	चल द्रवीय	Hydraulic
व्युत्क्रम	Inverse	मिश्रित	Composite
बृहस्पति	Jupiter	वायुमंडलीय	Atmospheric
अक्षांश	Latitude	वायुगतिकी	Aerodynamics
मंगल	Mars	बहि:स्राव	Efflux
बुध	Mercury	तुल्यांक	Equivalent
कक्षा	Orbit	बुलबुला	Bubble
आवर्तिता	Periodicity	तरल	Fluid
प्लूटो	Pluto	तरलगतिकी	Fluid Dynamics
अध्यारोपण	Superposition	प्लवन	Floatation
सार्वत्रिक नियम	Universal law	अंशांकित	Calibrated
शुक्र	Venus	संपीड्य	Compressible
भारहीनता	Weightlessness	केशिका	Capillary
भार	Weight	युक्ति	Device
आंतरिक संरचना	Internal structure	गेज़ दाब	Gauge pressure
अभिलाक्षणिक गुण	Characteristic properties	अघूर्णी	Irrotational
इमारती खंड	Building blocks	धारारेखी प्रवाह	Streamline flow
पृथकन	Separation	पृष्ठ तनाव	Surface tension
अतिव्यापन	Overlapping	पृष्ठ ऊर्जा	Surface energy
घातांक	Power	प्रक्षोभ	Turbulence

अंतिम वेग	Terminal velocity
संरचना	Constitution
विसरण	Diffusion
स्वातंत्र्य-कोटि	Degree of freedom
द्वि-परमाणुक	Diatomic
समविभाजन	Equipartition
परिकल्पना	Hypothesis
अणुक	Molar
एक-परमाणुक	Monatomic
औसतमुक्त पथ	Mean free path
सूक्ष्मदर्शी	Microscope
आविर्भाव	Manifestation
प्रावस्था संक्रमण	Phase transition
बहु-परमाणुक	Polyatomic
पराग कण	Pollen grain
वर्ग-माध्यमूल चाल	Root mean square speed
दृढ़-घूर्णी	Rigid rotator
विशिष्ट ऊष्मा	Specific heat
दूरबीन, दूरदर्शी	Telescope
कंपनीय ऊर्जा	Vibrational energy
टेढ़ा-मेढ़ा	Zig zag
ऊष्मीय	Thermal
ऊष्मा	Heat
परम ताप मापक्रम	Absolute scale of temperature
परम शून्य	Absolute zero
आदर्श गैस	Ideal gas
रेखीय प्रसार गुणांक	Coefficient of linear expansion
आयतन प्रसार गुणांक	Coefficient of volume expansion
प्रतिवेश	Surroundings (of the system)
ऊर्जा के समविभाजन का नियम	Law of equipartition of energy
समतापीय	Isothermal
रुद्धोष्म	Adiabatic
प्रावस्थाएँ	Phases (solid, liquid, gas)
अनंत सूक्ष्म	Infinitesimal
साम्य रेखा	Equilibrium line
यांत्रिक साम्यता	Mechanical equilibrium
ऊष्मीय साम्यता	Thermal equilibrium
सह-अस्तित्व	Co-existence
ऊष्माशय	Reservoir (of heat)

अभिगम	Sink (of heat)
प्रशीतक	Refrigerator
निष्पादन गुणांक	Coefficient of performance
आदर्शीकृत उत्क्रमणीय प्रक्रम	Idealised reversible process
असममिति	Asymmetry
अर्ध स्थिर	Semi-static
अक्षयकारी बल	Conservative force
कार्नो इंजन	Carnot engine
कार्नो चक्र	Carnot cycle
क्षयकारी बल	Dissipative force
सूक्ष्म संघटक	Microscopic constituent
ऊष्माधारिता	Thermal capacity, Heat capacity
ग्राम-अणुक आयतन	Molar volume (22.4 L at STP)
अवशोषित	Absorbed
क्वथनांक	Boiling point
गलनांक	Melting point
ऊष्मारोधी	Heat Insulator
रुद्धोष्म भित्ति (दीवार)	Adiabatic wall
तापमिति	Thermometry
तापयुग्म	Thermocouple
ऊष्मीय प्रसार	Thermal expansion
स्थिर आयतन तापमापी	Constant volume thermometer
असंपीड्यता	Incompressibility
संघनित	Condensed
यंग गुणांक/यंग प्रत्यास्थता गुणांक	Young's Modulus
सन्निकटन	Approximation
ऊष्मीय प्रतिबल	Thermal stress
संपीडन विकृति	Compressive strain
अनुप्रस्थ काट	Cross section
ऊष्मामापी, कैलोरीमीटर	Calorimeter
मोलीय विशिष्ट ऊष्मा	Molar specific heat
तापस्थायी	Thermostat
सुस्पष्ट	Distinct
समताप रेखा	Isotherm
स्थैतिककल्प	Quasi-static
केल्विन मापक्रम	Kelvin scale
समआयतनिक	Isochoric
संचरण	Conduction
संवहन	Convection
विकिरण	Radiation

ऊष्मा संचरण	Thermal conduction	माडुलन	Modulation
ऊष्मा संवहन, संवहन	Thermal convection	कर्षण	Drag
ऊष्मा विकिरण	Thermal Radiation	ऐंठन कोण	Angle of twist
ऊष्मीय संपर्क	Thermal contact	(फूरिये) विश्लेषण	(Fourier) Analysis
स्थायी अवस्था	Stationary state	अनुप्रस्थ तरंग	Transverse wave
ऊष्मा चालकता	Thermal conductivity	अनुदैर्घ्य तरंग	Longitudinal wave
ताप प्रवणता	Temperature gradient	प्रगामी तरंग	Progressive wave
उत्सर्जन	Emission	व्यतिकरण	Interference
अवशोषण	Absorption	दोलन	Oscillation
परावर्तन	Reflection	विक्षोभ	Disturbance
पारगमन	Transmission	वाक्-तंतु	Vocal cords
अवशोषकता	Absorptivity	अंतर-तारकीय आकाश	Inter-stellar space
उत्सर्जकता	Emissivity	सूक्ष्म तरंगें	Microwaves
परावर्तकता	Reflectivity	पराबैंगनी प्रकाश	Ultraviolet light
किरखोफ का नियम	Kirchhoff's law	क्वांटम यांत्रिकीय	Quantum mechanical
बोल्ट्ज़मान-स्टेफॉन का नियम	Boltzmann-Stefan's law	आवर्ती दोलन	Harmonic oscillation
वीन-विस्थापन नियम	Wein's displacement law	स्पंद	Pulse
शीतलन	Cooling	ज्यावक्रीय फलन	Sinusoidal function
दीप कज्जल	Lamp black	कोज्या वक्र	Cosine curve
उत्तापमापी	Pyrometer	अप्रगामी तरंग	Stationary wave
सौर ऊष्मांक	Solar constant	अपरूपण विकृति	Shearing strain
प्रकीरण	Scattered	केशिकात्वीय तरंगें	Capillary waves
आवर्ती गति	Periodic motion	गुरुत्व तरंगें	Gravity waves
सरल आवर्त गति	Simple harmonic motion	कोणीय तरंग संख्या	Angular wave number
अवमंदित गति	Damped motion	कोणीय आवृत्ति	Angular frequency
प्रणोदित दोलन	Forced oscillations	कला-कोण	Phase angle
युग्मित दोलक	Coupled oscillator	तरंग फलन	Wave function
गोलक	Bob	तरंगदैर्घ्य	Wavelength
कोणांक	Argument	गर्त	Trough
कंपन	Vibration	शीर्ष, शिखर	Crest
काल	Period	तानित डोरी	Stretched string
भूकंपी तरंगें	Seismic wave	आयतन प्रत्यास्थता गुणांक	Bulk modulus
वैद्युत चुंबकीय तरंगें	Electromagnetic wave	संपोषी व्यतिकरण	Constructive interference
द्रव्य तरंगें	Matter wave	विनाशी व्यतिकरण	Destructive interference
चर	Variable	निस्पंद	Nodes
संदर्भ (कण)	Reference (particle)	प्रस्पंद	Antinodes
प्रक्षेप	Projection	मूल विधा	Fundamental mode
त्रिज्य (घटक)	Radial (component)	प्रथम गुणावृत्ति	First harmonic
लय, ताल	Rhythm	द्वितीय गुणावृत्ति	Second harmonic
विस्पंद	Beats	गुणावृत्ति श्रेणी	Harmonic series
स्वातंत्र्य कोटि	Degree of freedom	गुणावृत्ति संख्या	Harmonic number
विधा	Mode	अनुनाद	Resonance

टिप्पणी

टिप्पणी